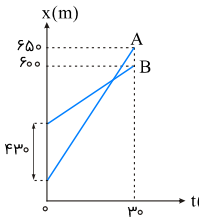
۱ گزینه ۳

نمودار مکان- زمان دو متحرک به‌صورت خطی است؛ بنابراین سرعت دو متحرک ثابت است.

باتوجه‌به شیب نمودار مکان- زمان، اختلاف سرعت دو متحرک را به دست می‌آوریم:



$$v_A = \frac{۶۵۰ - x_{۰A}}{۳۰}$$

$$v_B = \frac{۶۰۰ - x_{۰B}}{۳۰}$$

$$\Rightarrow v_A - v_B = \frac{۶۵۰ - x_{۰A}}{۳۰} - \frac{۶۰۰ - x_{۰B}}{۳۰}$$

$$= \frac{۶۵۰ - ۶۰۰ + \overbrace{(x_{۰B} - x_{۰A})}^{۴۳۰}}{۳۰}$$

$$= \frac{۴۸۰}{۳۰} = ۱۶\,m/s$$

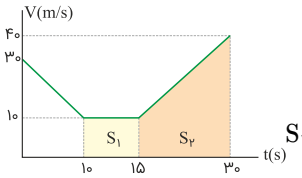
۲ گزینه ۳

کافی است نمودار سرعت- زمان حرکت را رسم کنیم. سطح زیر نمودار $(v - t)$ برابر با جابه‌جایی است که نسبت جابه‌جایی به زمان برابر با سرعت متوسط است.

$$t = ۱۰\,s \text{ تا } t = ۰ \text{ از}: \; v_۱ = a_۱ t + v_۰ \xrightarrow{a_۱ = -۲\,m/s^۲} v_۱ = -۲ \times ۱۰ + ۳۰ = ۱۰\,m/s$$

$$t = ۱۵\,s \text{ تا } t = ۱۰\,s \text{ از}: \; v_۲ = a_۲ t + v_۱ \xrightarrow{a_۲ = ۰} v_۲ = v_۱ = ۱۰\,m/s$$

$$t = ۳۰\,s \text{ تا } t = ۱۵\,s \text{ از}: \; v_۳ = a_۳ t + v_۲ \xrightarrow{a_۳ = ۲\,m/s^۲} v_۳ = ۲ \times ۱۵ + ۱۰ = ۴۰\,m/s$$



$$S_۱ = ۱۰ \times ۵ = ۵۰\,m$$

$$S_۲ = \frac{۴۰ + ۱۰}{۲} \times ۱۵ = ۳۷۵\,m$$

$$S_{\text{کل}} = S_۱ + S_۲ = ۴۲۵\,m$$

$$v_{av} = \frac{S_{\text{کل}}}{\Delta t} = \frac{۴۲۵}{۲۰} = ۲۱/۲۵\,m/s$$

۳ گزینه ۲

گام اول:

سرعت اولیهٔ هر دو جسم صفر است.

چون دو متحرک از یک نقطه شروع به حرکت می‌کنند و به یک مقصد معین می‌رسند، پس جابه‌جایی آن‌ها یکسان است:

$$\Delta x_۱ = \Delta x_۲$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}a_۱ {t_۱}^۲ = \frac{۱}{۲}a_۲ {t_۲}^۲ \quad (۱)$$

گام دوم: متحرک شماره (۱) که شتاب بیشتری دارد ۲s زودتر به مقصد رسیده، پس:

$$t_۱ = t_۲ - ۲ \quad (۲)$$

گام سوم: چون زمان حرکت متحرک شماره (۱) را می‌خواهیم $t_۲$ را از رابطهٔ (۲) در رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم و $t_۱$ را به دست می‌آوریم:

$$\xrightarrow{(۱)\ ,\ (۲)} a_۱ {t_۱}^۲ = \frac{۹}{۱۶}a \times (t_۱ + ۲)^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۹}{۱۶} = (\frac{t_۱}{t_۱ + ۲})^۲ \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{t_۱}{t_۱ + ۲}$$

$$\Rightarrow ۴t_۱ = ۳t_۱ + ۶ \Rightarrow t_۱ = ۶s$$

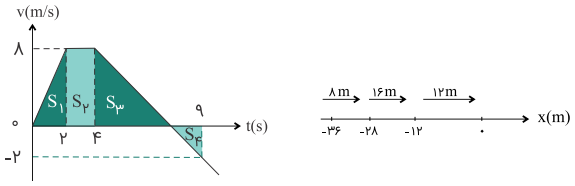
۴ گزینه ۲

گام اول

پس از چند ثانیه برای اولین بار از مبدأ می‌گذرد $\leftarrow$ $x = ۰ : t = ?$

گام دوم

به ترتیب برای بازه‌های زمانی مختلف (مطابق نمودار) جابجایی را به دست می‌آوریم. (جابجایی برای زمان‌هایی که نمودار زیر محور t است، منفی است.) تا لحظهٔ $t = ۴s$ مقدار جابجایی ۲۴ متر بوده است. در لحظهٔ ۴ ثانیه به بعد به کمک معادلهٔ مکان، زمانی که متحرک به مبدأ می‌رسد را حساب می‌کنیم:



از لحظهٔ $t = ۴s$ به بعد:

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰$$

$$\begin{cases} a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-۲ - ۸}{۹ - ۴} = -۲m/s^۲ \\ x_۰ = -۱۲\,m \ : \ v_۰ = ۸\,m/s \end{cases} \Rightarrow x = \frac{۱}{۲} \times -۲ \times t^۲ + ۸t + (-۱۲) = -t^۲ + ۸t - ۱۲$$

درنهایت زمان کل برابر است با:

$$x = -t^۲ + ۸t - ۱۲ \xrightarrow{x=۰} t^۲ - ۸t + ۱۲ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۲\,s \\ t = ۶\,s \end{cases} \Rightarrow t_T = \begin{cases} ۴ + ۲ = ۶\,s \\ ۴ + ۶ = ۱۰\,s \end{cases}$$

درنتیجه پس از ۶ ثانیه برای اولین بار از مبدأ مکان می‌گذرد.

۵ گزینه ۲

طبق تعریف سرعت متوسط داریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-۶ - ۰}{۴ - ۱} = -۲\,m/s$$

۶ گزینه ۳

حرکت از ۳ مرحله تشکیل شده که در مراحل ۱ و ۳ شتاب و زمان مساوی است.

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = ۲۰ \times ۲۵ = ۵۰۰\,m$$

$$x_۱ + x_۲ + x_۳ = ۵۰۰ \Rightarrow \frac{۱}{۲}at_۱^۲ + vt_۲ + \frac{۱}{۲}at_۳^۲ = ۵۰۰$$

$$\xrightarrow{t_۱=t_۳\,,\,t_۲=۲۵-۲t_۱} \frac{۱}{۲}(۵)t_۱^{\,۲} + v(۲۵ - ۲t_۱) + \frac{۱}{۲}(-۵)t_۱^{\,۲} = ۵۰۰ \Rightarrow v(۲۵ - ۲t_۱) = ۵۰۰ \qquad (۱)$$

حرکت در مرحلهٔ دوم یکنواخت است و سرعت متحرک در طول این مرحله برابر است با سرعت نهایی متحرک در مرحلهٔ اول یعنی:

سرعت در مرحلهٔ دوم حرکت، برابر با مقدار نهایی سرعت در مرحلهٔ اول حرکت است : $v = at_۱ = ۵t_۱ \qquad (۲)$

پس با جایگذاری (۲) در رابطهٔ (۱) داریم:

$$\xrightarrow{(۱)\,,\,(۲)} ۵t_۱(۲۵ - ۲t_۱) = ۵۰۰$$

$$\Rightarrow ۲t_۱^{\,۲} - ۲۵t_۱ + ۱۰۰ = ۰$$

$$\Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۲۰\,s \\ t_۱ = ۵\,s \Rightarrow t_۲ = ۲۵ - ۲\,(۵) = ۱۵\,s \end{cases}$$

۷ گزینه ۳

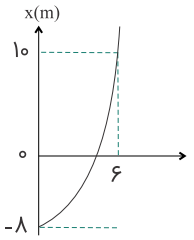
گام اول

سرعت متحرک در لحظه‌ای که متحرک از مبدأ مکان می‌گذرد؟ $\leftarrow$ $x = ۰\ ,\ v = ?$

گام دوم

برای به دست آوردن سرعت، معادلهٔ سرعت- زمان، و برای به دست آوردن معادلهٔ سرعت- زمان، معادلهٔ مکان را می‌خواهیم.

مطابق نمودار و داده‌های مسئله، معادلهٔ مکان را به دست می‌آوریم:



$$x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{۰}t + x_{۰}$$

$$t = ۰\ ,\ x_{۰} = -۸ \Rightarrow v_{۰} = ۰$$

$$t = ۶\,s\ ,\ x = ۱۰\,m \Rightarrow ۱۰ = \frac{۱}{۲} \times a \times ۳۶ + (-۸) \Rightarrow a = ۱\,m/s^{۲}$$

باتوجه‌به معادلهٔ مکان، لحظهٔ عبور از مبدأ برابر است با:

$$x = \frac{۱}{۲}t^{۲} - ۸ = ۰ \Rightarrow t = ۴\,s$$

حال برای ادامهٔ پاسخ، دو روش ارائه می‌شود:

ادامهٔ پاسخ به روش اول:

$$\begin{cases} x = \frac{۱}{۲}t^{۲} - ۸ \\ x = \frac{۱}{۲}at^{۲} + v_{۰}t + x_{۰} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = ۱\,m/s^{۲} \\ v_{۰} = ۰ \end{cases} \quad (I)$$

سپس معادلهٔ سرعت- زمان را به دست می‌آوریم:

$$v = at + v_{۰} \xrightarrow{(I)} v = t \xrightarrow{t=۴\,s} v = ۴\,m/s$$

ادامهٔ پاسخ به روش دوم:

می‌توان با یک‌بار مشتق گیری از معادلهٔ مکان- زمان، معادلهٔ سرعت- زمان را به دست آورد، سپس لحظهٔ $t = ۴\,s$ را در آن جایگذاری می‌کنیم تا سرعت در آن لحظه به دست آید:

$$x = \frac{۱}{۲}t^{۲} - ۸ \xrightarrow{v=\frac{dx}{dt}} v = t \xrightarrow{t=۴s} v = ۴\,m/s$$

۸ گزینه ۴

گام اول

الف) فاصلهٔ ۸۰ متری از A تا B ← $\Delta x_{A-B} = ۸۰m$

ب) در مدت ۸ ثانیه طی می کند ← $\Delta t = ۸s$

ج) در لحظهٔ رسیدن به نقطهٔ B سرعتش به $۱۵m/s$ می رسد ← $v_B = ۱۵m/s$

د) شتاب متحرک چند متر بر مجذور ثانیه است؟ ← $a =$

گام دوم

روش اول:

ابتدا v_A را از رابطهٔ $v_{av} = \frac{v_A + v_B}{۲}$ محاسبه کرده و سپس با استفاده از معادلهٔ $v_B = at + v_A$، شتاب را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{v_A + v_B}{۲} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \frac{v_A + v_B}{۲} = \frac{۸۰}{۸} \Rightarrow v_A = ۵\,m/s$$

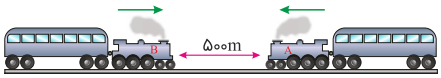
$$v_B = at + v_A \Rightarrow ۱۵ = a \times ۸ + ۵ \Rightarrow a = \frac{۵}{۴} m/s^۲$$

روش دوم:

اگر حرکت متحرک را از B به سمت A در نظر بگیریم. سرعت اولیه همان v_B می شود ولی در جهت منفی و با استفاده از رابطه $\Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t$ و جایگذاری داده ها به‌راحتی شتاب به دست می آید.

$$\begin{cases} \Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \\ \Delta x = x_A - x_B = -۸۰ \Rightarrow -۸۰ = \frac{۱}{۲}a \times (۸)^۲ - ۱۵ \times ۸ \Rightarrow a = \frac{۵}{۴} m/s^۲ \\ v_{۰B} = v_B = -۱۵ m/s \end{cases}$$

۹ گزینه ۲



سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر با جابه‌جایی است.

بنابراین جابه‌جایی هر دو متحرک را در مدت $۱۰s$ که متحرک A متوقف شده است، محاسبه می‌کنیم.

$$\Delta x_A = S_A = \frac{۱۰ \times ۳۰}{۲} = ۱۵۰\,m$$

شیب نمودار سرعت- زمان برابر با شتاب متحرک B است:

$$a_B = -\frac{۴۰}{۱۶} = -\frac{۱۰}{۴} m/s^۲$$

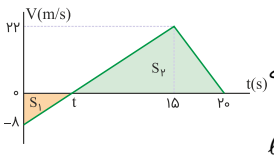
$$\Delta x_B = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t = \frac{۱}{۲}(-\frac{۱۰}{۴}) \times ۱۰^۲ + ۴۰ \times ۱۰ = ۲۷۵\,m$$

فاصلهٔ دو متحرک B , A $d = ۵۰۰ - (\Delta x_A + \Delta x_B) = ۵۰۰ - (۱۵۰ + ۲۷۵) \Rightarrow d = ۷۵\,m$

دقت شود: اگر علامت منفی را برای شتاب متحرک B در نظر نگیریم، مسافت پیموده شدهٔ این متحرک برابر با $۵۲۵\,m$ به دست می‌آید که تفاضل آن با $۵۰۰\,m$ برابر با $۲۵\,m$ می‌شود و به گزینهٔ (۱) می‌رسیم که اشتباه است.

۱۰ گزینه ۴

سطوح محصور بین نمودار سرعت- زمان و محور زمان برابر مسافت طی‌شده است.



طبق تشابه : $\frac{t}{۸} = \frac{۱۵ - t}{۲۲} \Rightarrow t = ۴\,s$

$$\ell = S_۱ + S_۲ = (\frac{۴ \times ۸}{۲}) + (\frac{۱۶ \times ۲۲}{۲}) = ۱۶ + ۱۷۶ \Rightarrow \ell = ۱۹۲\,m$$

۱۱ گزینه ۲

گام اول

الف) از حال سکون ← $v_0 = 0$

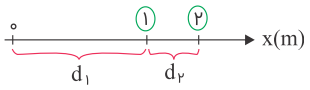
ب) مسافت طی شده در مرحلهٔ اول، ۴ برابر مسافت طی شده در مرحله دوم ← $d_1 = 4d_2$

ج) ادامهٔ مسیر را با شتاب ثابت a_2 طی می‌کند تا بایستد ← $v_2 = 0$ (سرعت در انتهای مسیر) ، در زمان توقف شتاب منفی است پس $v_2 = 0$

د) اندازهٔ a_2 چند برابر a_1 ← $\frac{|a_2|}{|a_1|} = ?$

گام دوم

برای درک بهتر مسئله، مسافت‌های طی شده روی محور x را رسم می‌کنیم.



به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، مسافت متحرک در مرحلهٔ اول و دوم را برحسب سرعت و شتاب به دست می‌آوریم:

$$d_1 = \frac{v_1^2 - v_0^2}{2a_1} = \frac{v_1^2}{2a_1} \ , \ d_2 = \frac{v_2^2 - v_1^2}{2a_2} = \frac{-v_1^2}{2a_2}$$

ازآنجایی‌که $d_1 = 4d_2$، نسبت $\frac{|a_2|}{|a_1|}$ برابر است با:

$$d_1 = 4d_2 \Rightarrow \frac{v_1^2}{2a_1} = -4\frac{v_1^2}{2a_2} \Rightarrow \frac{a_2}{a_1} = -4 \Rightarrow \frac{|a_2|}{|a_1|} = 4$$

۱۲ گزینه ۲

گام اول

الف) بدون سرعت اولیه و شتاب ثابت ← $v_A = 0$

ب) فاصلهٔ ۱۲۰ متری BC ← $\Delta x_{BC} = 120m$

ج) BC را در مدت ۱۰s طی می‌کند. ← $\Delta t_{BC} = 10s$

د) سرعت متحرک در نقطهٔ C ، ۲۰m/s ← $v_C = 20m/s$

ه) فاصله بین A-B ؟ ← $\Delta x_{AB} = ?m$

گام دوم

شتاب ثابت است، پس سرعت در نقطهٔ B و شتاب کل برابر است با:

$$v_{avBC} = \frac{v_B + v_C}{2} = \frac{\Delta x_{BC}}{\Delta t_{BC}} \Rightarrow \frac{v_B + 20}{2} = \frac{120}{10} \Rightarrow v_B = 4\,m/s$$

$$a_{کل} = a_{avBC} = \frac{v_C - v_B}{t_C - t_B} = \frac{20 - 4}{10} = 1/6\,m/s^2$$

درنهایت با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان، فاصلهٔ بین A-B را محاسبه می‌کنیم:

$$v_B^2 - v_A^2 = 2a\Delta x_{AB} \Rightarrow 16 = 2 \times 1/6 \times \Delta x_{AB} \Rightarrow \Delta x_{AB} = 5\,m$$

۱۳ گزینه ۴

$$\text{۲ ثانیهٔ دوم} : \begin{cases} t_1 = 2\,s \\ t_2 = 4\,s \end{cases}$$

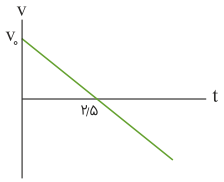
$$v = 2t^2 - 4t - 2 \Rightarrow \begin{cases} \xrightarrow{t_1=2\,s} v_1 = 2(2)^2 - 4(2) - 2 = -2\,m/s \\ \xrightarrow{t_2=4\,s} v_2 = 2(4)^2 - 4(4) - 2 = 14\,m/s \end{cases}$$

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} = \frac{14 - (-2)}{4 - 2} = \frac{16}{2} = 8\,m/s^2$$

۱۴ گزینه ۳

گام اول: طبق تقارنی که حرکت با شتاب ثابت نسبت به لحظهٔ تغییر جهت دارد، اگر جابه‌جایی در یک بازهٔ زمانی صفر باشد، سرعت در لحظهٔ وسط آن بازه برابر با صفر است؛ بنابراین چون جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم حرکت صفر است، متحرک در لحظهٔ $۲/۵\,s$ تغییر جهت داده است.

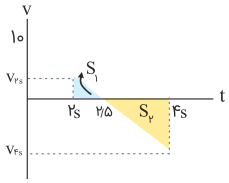
گام دوم: چون شتاب $-۴\,m/s^۲$ است و متحرک در لحظهٔ $t = ۲/۵\,s$ تغییر جهت داده است، نمودار سرعت زمان متحرک به‌صورت زیر خواهد بود:



باتوجه‌به $a = -۴\,m/s^۲$، $v_۰$ برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -۴ = \frac{۰ - v_۰}{۲/۵ - ۰} \Rightarrow v_۰ = ۱۰\ m/s$$

گام سوم: سرعت‌های متحرک در لحظات $t_۱ = ۲s$ و $t_۲ = ۴\,s$ را تعیین می‌کنیم و با استفاده از مساحت زیر نمودار، مسافت طی‌شده در بازهٔ $(۲\,s\,,\,۴\,s)$ را به دست می‌آوریم.



$$v = at + v_۰ = -۴t + ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} v_{۲s} = ۲\ m/s \\ v_{۴s} = -۶\,m/s \end{cases}$$

$$L = S_۱ + S_۲ = \frac{۲ \times ۰/۵}{۲} + \frac{۱/۵ \times ۶}{۲} = ۵\,m$$

۱۵ گزینه ۱

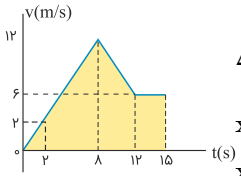
شتاب در بازهٔ زمانی (۰ , ۸) ثابت و برابر است با:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v(۸) - v(۰)}{۸ - ۰} = \frac{۱۲ - ۰}{۸ - ۰} = \frac{۳}{۲}\,m/s^۲$$

در لحظهٔ $t = ۲\,s$ سرعت را به دست می آوریم:

$$v(۲) = at + v_۰ \Rightarrow v = \frac{۳}{۲} \times ۲ + ۰ = ۳\,m/s$$

حال به کمک سطح زیر نمودار سرعت- زمان جابه جایی را در بازهٔ زمانی (۲ , ۱۵) محاسبه می کنیم:

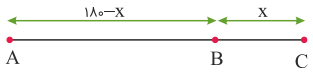


$$\Delta x = x_۲ - x_۱ = x_۲ - (-۶) = S$$

$$x_۲ + ۶ = (\frac{(۱۲ + ۳)۶}{۲} + \frac{(۱۲ + ۶)۴}{۲} + (۳ \times ۶))$$

$$x_۲ + ۶ = ۹۹ \Rightarrow x_۲ = ۹۳$$

۱۶ گزینه ۲



$$\begin{cases} ۱۸۰ - x = v_A t \\ x = v_C t \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۸۰ - x}{x} = \frac{v_A}{v_C} \quad (۱)$$

$$\begin{cases} ۱۸۰ - x = v_C \times ۲۵ \\ x = v_A \times ۱۶ \quad (۲) \end{cases} \Rightarrow \frac{۱۸۰ - x}{x} = \frac{v_C \times ۲۵}{v_A \times ۱۶}$$

$$\xrightarrow{(۱)} \frac{v_A}{v_C} = \frac{v_C \times ۲۵}{v_A \times ۱۶} \Rightarrow \frac{v_A^۲}{v_C^۲} = \frac{۲۵}{۱۶} \Rightarrow \frac{v_A}{v_C} = \frac{۵}{۴} \xrightarrow{(۱)} \frac{۱۸۰ - x}{x} = \frac{۵}{۴}$$

$$\Rightarrow ۴(۱۸۰) - ۴x = ۵x \Rightarrow x = ۸۰\,m$$

حال با جایگذاری $x = ۸۰$ در معادلهٔ (۲) مقدار V_A را به دست می آوریم:

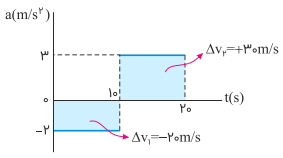
$$x = v_A \times ۱۶ \Rightarrow ۸۰ = v_A \times ۱۶ \Rightarrow v_A = ۵\,m/s$$

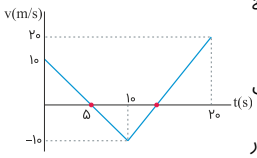
۱۷ گزینه ۴

گام اول: نمودار سرعت زمان متحرک را تا لحظهٔ $t = ۲۰\,s$ رسم می‌کنیم:

گام دوم: باتوجه‌به نمودار $v - t$ جابه‌جایی متحرک در $۱۰\,s$ اول صفر است؛ پس برای دومین بار در لحظهٔ $t = ۱۰\,s$ از مبدأ عبور می‌کند.

گام سوم: اگر شروع مجدد حرکت را با شتاب $۳\,m/s^۲$ لحظهٔ $t = ۱۰\,s$ فرض کنیم، $\frac{۱۰}{۳}\,s$ بعد سرعت متحرک صفر و $\frac{۲۰}{۳}\,s$ بعد سرعت متحرک $+۱۰\,m/s$ شده و در این لحظه مجدداً متحرک از مبدأ عبور می‌کند؛ پس باتوجه‌به اینکه فرض کردید لحظهٔ شروع حرکت $t = ۱۰\,s$ باشد، لحظه‌ای که متحرک برای سومین بار از مبدأ عبور می‌کند را به دست می‌آوریم:





$$t = ۱۰ + \frac{۲۰}{۳} = \frac{۵۰}{۳}\,s$$

۱۸ گزینه ۳

گام اول: جابه‌جایی متحرک را در بازهٔ زمانی ۱s تا ۶s به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} \Rightarrow \Delta x = ۳ \times ۵ = ۱۵\,m$$

چون متحرک تغییر جهت داشته پس مسافت بزرگ‌تر از جابه‌جایی است؛ بنابراین گزینه‌های ۱ و ۲ نمی‌توانند درست باشند.

گام دوم: جابه‌جایی متحرک را در بازه‌های زمانی یک ثانیه‌ای بررسی می‌کنیم. چون سرعت در $t = ۲s$ صفر است، اگر جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم d باشد در ثانیه‌های بعدی مضرب فردی از d است:

بازهٔ زمانی ۱s تا ۲s : $\Delta x_۱ = -\vec{d}$

بازهٔ زمانی ۲s تا ۳s : $\Delta x_۲ = \vec{d}$

بازهٔ زمانی ۳s تا ۴s : $\Delta x_۳ = ۳\vec{d}$

بازهٔ زمانی ۴s تا ۵s : $\Delta x_۴ = ۵\vec{d}$

بازهٔ زمانی ۵s تا ۶s : $\Delta x_۵ = ۷\vec{d}$

گام سوم: d را به دست می‌آوریم:

$$\Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ + \Delta x_۳ + \Delta x_۴ + \Delta x_۵$$

$$۱۵ = -d + d + ۳d + ۵d + ۷d \Rightarrow ۱۵ = ۱۵d \Rightarrow d = ۱\,m$$

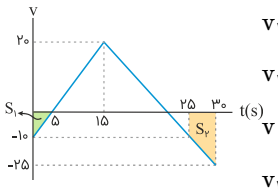
گام چهارم: مسافت طی‌شده را محاسبه می‌کنیم:

$$\ell = |\Delta x_۱| + |\Delta x_۲| + |\Delta x_۳| + |\Delta x_۴| + |\Delta x_۵|$$

$$\ell = ۱ + ۱ + ۳ + ۵ + ۷ = ۱۷\,m$$

۱۹ گزینه ۱

بهترین روش رسم نمودار سرعت- زمان است.



$$v_{۱۵} = at + v_۰$$

$$v_{۱۵} = ۲ \times ۱۵ - ۱۰ \Rightarrow v_{۱۵} = ۲۰\,m/s$$

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = ۲t + (-۱۰) \Rightarrow t = ۵s$$

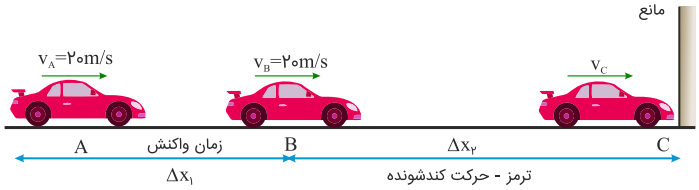
$$v_{۲۵} = at + v_۰$$

$$v_{۲۵} = -۳ \times ۱۰ + ۲۰ = -۱۰\,m/s$$

$$v_{۳۰} = -۳ \times ۱۵ + ۲۰ = -۲۵\,m/s$$

$$\frac{S_۲\ \text{۵ ثانیهٔ ششم}}{S۱\ \text{۵ ثانیهٔ اول}} = \frac{\frac{۲۵ + ۱۰}{۲} \times ۵}{\frac{۱۰ \times ۵}{۲}} = \frac{۳۵}{۱۰} = ۳/۵$$

۲۰ گزینه ۳



$$\Delta x_۱ = vt_۱ = ۲۰ \times ۰/۵ = ۱۰\,m$$

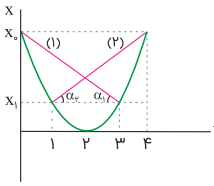
$$\Delta x_۲ = ۵۲ - ۱۰ = ۴۲m$$

$$v_C^۲ - v_B^۲ = -۲a(\Delta x_۲) \rightarrow v_C^۲ - ۲۰^۲ = -۲ \times ۴ \times ۴۲$$

$$v_C^۲ = -۳۳۶ + ۴۰۰ = ۶۴ \Rightarrow v_C = ۸m/s$$

۲۱ گزینه ۴

شیب خطی که دو نقطه از نمودار مکان- زمان را به هم می‌رساند برابر با سرعت متوسط متحرک بین آن دو نقطه است:

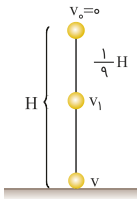


$$V_{av(۰\rightarrow ۳s)} = \tan\alpha_۱ = \frac{x_۰ - x_۱}{۳ - ۰} = \frac{\Delta x}{۳}$$

$$V_{av(۱\rightarrow ۴s)} = \tan\alpha_۲ = \frac{x_۰ - x_۱}{۴ - ۱} = \frac{\Delta x}{۳}$$

$$|V_{av(۰\rightarrow ۳s)}| = |V_{av(۱\rightarrow ۴s)}|$$

۲۲ گزینه ۳



$$v_{av} = \frac{v_۱ + v_۰}{۲} \Rightarrow v_۱ = ۲v_{av} = ۲ \times ۴/۹ \Rightarrow v_۱ = g$$

$$\left(\frac{v}{v_۱}\right)^۲ = \frac{H}{\frac{۱}{۹}H}$$

$$\frac{v}{g} = ۳ \Rightarrow v = ۳g = ۲۹/۴\,m/s$$

۲۳ گزینه ۳

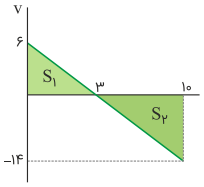
باتوجه‌به ماکزیمم سهمی می‌توانیم سرعت اولیه و شتاب حرکت را محاسبه کنیم:

$$\Delta x = \frac{v + v_۰}{۲}\Delta t$$

$$۳۶ - ۲۷ = \frac{۰ + v_۰}{۲} \times ۳ \Rightarrow v_۰ = ۶\,m/s$$

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = a \times ۳ + ۶ \Rightarrow a = -۲\,m/s^۲$$

کافی است نمودار سرعت- زمان را رسم کنیم:



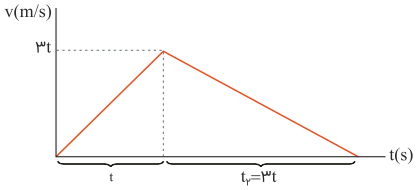
$$\left.\begin{array}{l} S_۱ = ۹ \\ |S_۲| = ۴۹ \end{array}\right\} \Rightarrow S = ۵۸\,m$$

۲۴ گزینه ۴

گام اول: ابتدا نمودار سرعت زمان متحرک را رسم می‌کنیم. اگر مدت‌زمان حرکت متحرک با شتاب $۳\ m/s^۲$ برابر با t باشد، سرعت متحرک در انتهای حرکت با شتاب $۳\ m/s^۲$، طبق رابطهٔ $v = at + v_۰$ به $v = ۳t + ۰ = ۳t$ می‌رسد. در مرحلهٔ دوم که حرکت با شتاب $۱\ m/s^۲$ کند می‌شود، متحرک پس از مدت Δt می‌ایستد که Δt از رابطهٔ $v = at + v_۰$ به دست می‌آید. توجه کنید که سرعت اولیهٔ مرحلهٔ دوم، سرعت انتهای قسمت اول است و سرعت انتهای این قسمت برابر با صفر است؛ بنابراین مدت حرکت قسمت دوم حرکت برابر است با:

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = -۱ \times t_۲ + ۳t \Rightarrow t_۲ = ۳t$$

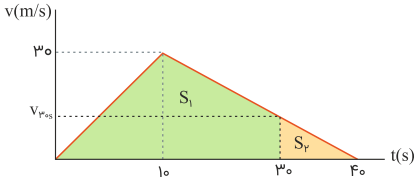
بنابراین نمودار سرعت زمان متحرک به‌صورت شکل زیر است:



گام دوم: مسافت طی‌شده توسط متحرک که همان مساحت سطح زیر نمودار است، برابر با $۶۰۰\,m$ است؛ بنابراین t برابر است با:

$$S = ۶۰۰ \Rightarrow \frac{۳t \times ۴t}{۲} = ۶۰۰ \Rightarrow t = ۱۰\,s$$

گام سوم: برای محاسبهٔ مسافت طی‌شده در $(۰, ۳۰\,s)$ کافی است، مساحت سطح زیر نمودار را در این بازه به دست بیاوریم؛ یعنی $S_۱$.



در مرحلهٔ دوم : $a = \frac{\Delta v}{\Delta t}$

$$\Rightarrow -۱ = \frac{v_{۳۰s} - ۳۰}{۳۰ - ۱۰} \Rightarrow v_{۳۰s} = ۱۰\ m/s$$

$$S_۱ = S_{کل} - S_۲ = \frac{۳۰ \times ۴۰}{۲} - \frac{۱۰ \times ۱۰}{۲} = ۵۵۰\,m$$

۲۵ گزینه ۲

باتوجه‌به اینکه در بازهٔ $(۴s, ۱۲s)$، جابه‌جایی دو متحرک باهم برابر است، سرعت متوسط این دو متحرک نیز باهم برابر است.

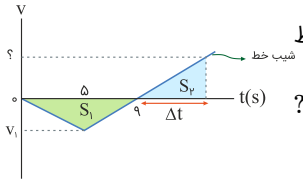
$$v_{av}(B) = v_A$$

در حرکت شتاب ثابت سرعت متوسط بین دو لحظهٔ $t_۱$ و $t_۲$ با سرعت متوسط متحرک در وسط بازه یعنی لحظهٔ $\frac{t_۱ + t_۲}{۲}$ برابر است.

بنابراین در لحظهٔ $t = \frac{۴ + ۱۲}{۲} = ۸\,s$ سرعت متوسط B با سرعت A برابر است.

۲۶ گزینه ۱

چون متحرک از $x = ۰$ شروع به حرکت کرده است و مجدداً می‌خواهد به $x = ۰$ برسد، جابه‌جایی متحرک باید صفر باشد. جابه‌جایی در نمودار $(v - t)$ برابر با مجموع جبری مساحت‌های زیر نمودار $(v - t)$ است؛ بنابراین مساحت سطح پایین محور t باید با مساحت بالای محور t برابر باشد. اگر لحظهٔ برابری این دو مساحت را t در نظر بگیریم، داریم:



$$\text{شیب خط} = \frac{۰ - (-v_۱)}{۹ - ۵} = \frac{v_۱}{۴}$$

$$? = \frac{v_۱}{۴} \times \Delta t$$

$$S_۱ = S_۲ \Rightarrow \frac{v_۱ \times ۹}{۲} = \frac{\frac{v_۱}{۴}\Delta t \times \Delta t}{۲} \Rightarrow \Delta t = ۶\,s$$

$$t = ۹ + \Delta t = ۹ + ۶ = ۱۵\,s$$

۲۷ گزینه ۲

گام اول: ابتدا با استفاده از رابطهٔ $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$، تندی گلوله، هنگام برخورد به زمین را (v) به دست می‌آوریم:

$$K = \frac{۱}{۲}mv^۲ \Rightarrow ۲۴/۲ = \frac{۱}{۲} \times ۰/۱ \times v^۲ \Rightarrow v^۲ = ۴۸۴ = ۴ \times ۱۲۱$$

$$\Rightarrow v = ۲ \times ۱۱ = ۲۲\ m/s$$

گام دوم: یک ثانیه قبل از برخورد به زمین تندی گلوله به‌اندازهٔ $a = g = ۱۰\ m/s^۲$ کمتر از لحظهٔ برخورد به زمین است و برابر است با:

$$v_۱ = v - g = ۲۲ - ۱۰ = ۱۲\ m/s$$

گام سوم: سرعت متوسط در ثانیهٔ آخر برابر با میانگین سرعت‌های ابتدا و انتهای این بازه یعنی $\frac{v_۱ + v}{۲}$ است؛ پس:

$$v_{av} = \frac{v + v_۱}{۲} = \frac{۲۲ + ۱۲}{۲} = ۱۷\ m/s$$

۲۸ گزینه ۳

ابتدا در مدت ۱۱s جابه‌جایی دو متحرک را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x_A = vt = ۱۰ \times ۱۱ = ۱۱۰\,m$$

$$\begin{cases} \Delta x_{۱B} = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۵^۲ + ۲ \times ۵ = ۳۵\,m \\ \Delta x_{۲B} = vt_۲ = (+at_۱ + v_۰)t_۲ = (+۲ \times ۵ + ۲)(۱۱ - ۵) = ۷۲\,m \end{cases}$$

$$\Delta x_B = \Delta x_{۱B} + \Delta x_{۲B} = ۱۰۷\,m$$

حال می‌توانیم با مساوی قرار دادن مسافت‌های پیموده شده لحظهٔ رسیدن دو متحرک به یکدیگر و همچنین اندازهٔ سرعت آن‌ها را محاسبه کنیم:

$$\left.\begin{aligned} x_B &= vt = ۱۲t \\ x_A &= \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \\ x_A &= \frac{۱}{۲}(-۲)t^۲ + ۱۰t + ۳ \end{aligned}\right\} \Rightarrow x_A = x_B$$

$$-t^۲ + ۱۰t + ۳ = ۱۲t \Rightarrow t^۲ + ۲t - ۳ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} t = ۱ \\ t = -۳ \end{cases}$$

$$v_B = ۱۲\,m/s$$

$$v_A = -at + v_۰ = -۲ \times ۱ + ۱۰ = ۸\,m/s$$

$$v_B - v_A = ۱۲ - ۸ = ۴\,m/s$$

۲۹ گزینه ۲

ابتدا از فرمول مستقل از سرعت اولیه، شتاب را محاسبه می‌کنیم:

$$\Delta x = -\frac{۱}{۲}at^۲ + vt \Rightarrow ۷۵ = -\frac{۱}{۲}a \times ۵^۲ + ۲۰ \times ۵$$
$$\Rightarrow a = ۲m/s^۲$$

طبق تصاعد عددی خواهیم داشت:

$$x_۲ = x_۱ + at^۲$$

$$\Delta x_۲ = ۷۵ + ۲(۵)^۲ = ۱۲۵\,m$$

$$V_{av} = \frac{\Delta x_۲}{\Delta t} = \frac{۱۲۵}{۵} = ۲۵\,m/s$$

۳۰ گزینه ۳

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_{۱۰s} - x_۰}{۱۰ - ۰} = \frac{۲۰ - (-۴۰)}{۱۰} = ۶\,m/s$$

۳۱ گزینه ۱

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{S_{(v-t)}}{\Delta t} = \frac{\frac{v_{max} \times ۲۵}{۲}}{۲۵} = \frac{v_{max}}{۲} = ۱۰ \Rightarrow v_{max} = ۲۰\,m/s$$

۳۲

گزینه ۳

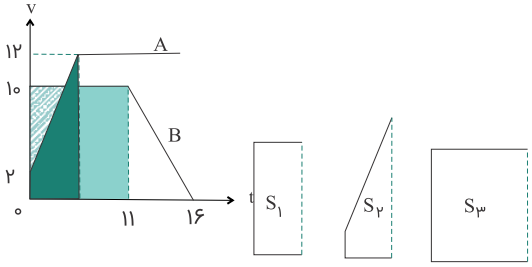
گام اول

الف) در لحظهٔ $t = ۰$ هر دو در مکان $x = ۰ \leftarrow x_{۰A} = x_{۰B} = ۰$

ب) چند ثانیه پس از $t = ۰$ دو متحرک به هم می‌رسند؟ $\leftarrow x_A = x_B \ , \ t = ?$

گام دوم

مطابق نمودار $v - t$ داده‌شده و باتوجه‌به گزینه‌ها مسئله را از لحظهٔ $t = ۵s$ به بعد بررسی می‌کنیم؛ یعنی در حالت اول، از لحظهٔ $t = ۵s$ تا $t = ۱۱s$ معادله مکان آن‌ها را مساوی قرار می‌دهیم و در حالت دوم از لحظهٔ $t = ۱۱s$ به بعد معادلهٔ مکان آن‌ها را باهم برابر می‌گذاریم:



معادلهٔ مکان دو متحرک A و B را در حالت اول $(t_۱ = ۵s)$ نوشته و باهم مساوی قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x_{۱A} = |S_۱| \\ S_۱ = \dfrac{۲ + ۱۲}{۲} \times ۵ = ۳۵ \end{cases} \Rightarrow x_{۱A} = ۳۵m \xrightarrow{v_A = ۱۲m/s} x_A = ۱۲t + ۳۵$$

$$\begin{cases} x_{۱B} = |S_۲| \\ S_۲ = ۱۰ \times ۵ = ۵۰ \end{cases} \Rightarrow x_{۱B} = ۵۰\,m \xrightarrow{v_B = ۱۰m/s} x_B = ۱۰t + ۵۰$$

$\Rightarrow x_A = x_B \Rightarrow ۱۲t + ۳۵ = ۱۰t + ۵۰ \Rightarrow t = ۷/۵s \quad : t = ۵\,s$ یعنی ۷/۵ s بعد از لحظهٔ

این یعنی ۷/۵ ثانیه بعد از لحظهٔ $t = ۵s$ که چون بازه زمانی در این مرحله $۱۱ - ۵ = ۶s$ است؛ پس در این حالت، دو متحرک به هم نمی‌رسند.

حالا معادلهٔ مکان دو متحرک از $t = ۱۱s$ به بعد را مساوی قرار می‌دهیم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t + x_{۰A} \\ x_{۰A} = S_۱ + S_۲ = ۳۵ + ۷۲ = ۱۰۷ \end{cases} \Rightarrow x_A = ۱۲t + ۱۰۷ \quad (I)$$

$$\begin{cases} x_{۰B} = S_۳ = ۱۱۰\,m \ , \ a = -\dfrac{۱۰}{۱۶ - ۱۱} = -۲\,m/s^۲ \ , v_{۰B} = ۱۰m/s \\ x_B = \dfrac{۱}{۲}at^۲ + v_{۰B}t + x_{۰B} \Rightarrow x_B = -t^۲ + ۱۰t + ۱۱۰ \quad (II) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} x_A = x_B \Rightarrow ۱۲t + ۱۰۷ = -t^۲ + ۱۰t + ۱۱۰ \Rightarrow t = ۱s$$

۱ ثانیه بعد از لحظهٔ $t = ۱۱s$ یعنی $t = ۱۱ + ۱ = ۱۲\,s$ ثانیه بعد از $t = ۰$ است.

۳۳

گزینه ۳

گام اول

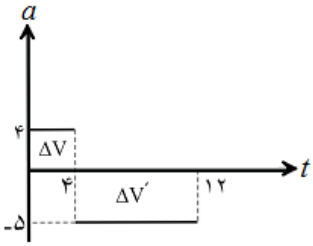
الف) در مبدأ زمان با سرعت $۴m/s$ از مبدأ مکان می‌گذرد ← $x_۰ = ۰\ ,\ v_۰ = ۴\ m/s$

ب) مسافت طی‌شده در بازهٔ ۰ تا ۱۲ ثانیه ← $\Delta t = ۱۲\ s\ :$ مسافت طی‌شده $= ?$

گام دوم

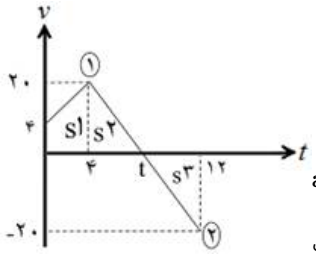
باید نمودار سرعت- زمان را رسم کنیم تا با استفاده از این نکته که مساحت زیر نمودار $v - t$ برابر با مقدار جابجایی است، مسافت را در بازهٔ مشخص به دست آوریم.

برای رسم نمودار $v - t$ سرعت در لحظات $t = ۱۲\ s\ ,\ t = ۴\ s$ را حساب می‌کنیم.



$$\begin{cases} \Delta v = v_۱ - v_۰ \\ v_۰ = ۴m/s \\ \Delta v = ۴ \times ۴ = ۱۶m/s \end{cases} \Rightarrow ۱۶ = v_۱ - ۴ \Rightarrow v_۱ = ۲۰\ m/s$$

$$\begin{cases} \Delta v' = v_۲ - v_۱ \\ v_۱ = ۲۰m/s \\ \Delta v' = (۱۲ - ۴) \times -۵ = -۴۰m/s \end{cases} \Rightarrow -۴۰ = v_۲ - ۲۰ \ \rightarrow\ v_۲ = -۲۰\,m/s$$



حالا مطابق نمودار $v - t$ لحظهٔ t را حساب می‌کنیم (t بین $۴s$ و $۱۲s$ است پس شتاب $-۵m/s^۲$ است).

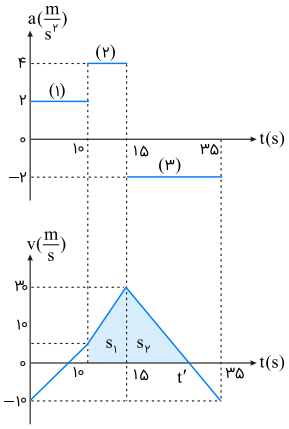
$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -۵ = \frac{۰ - ۲۰}{t - ۴} \Rightarrow t = ۸s$$

درنهایت باتوجه‌به اینکه قدر مطلق جابجایی در بازه‌های مختلف برابر مسافت طی‌شده است، مسافت طی‌شده در ۱۲ ثانیه را به دست می‌آوریم:

$$\text{مسافت طی‌شده} = \frac{۴ + ۲۰}{۲} \times ۴ + \frac{۲۰ \times ۴}{۲} + \frac{۲۰ \times ۴}{۲} = ۱۲۸\ m$$

۳۴ گزینه ۳

باتوجه‌به نمودار شتاب- زمان، نمودار سرعت- زمان را رسم کرده و از طریق مساحت زیر نمودار سرعت- زمان، بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ در بازهٔ زمانی داده‌شده را محاسبه می‌کنیم:



$$(۱): v = a_۱t + v_۰ \Rightarrow v = ۲t - ۱۰$$
$$\xrightarrow{t=۱۰s} v_۱ = ۲ \times ۱۰ - ۱۰ = ۱۰m/s$$

$$(۲): v = a_۲t + v_۱ \Rightarrow v = ۴t + ۱۰$$
$$\xrightarrow{t=۵s} v_۲ = ۴ \times ۵ + ۱۰ = ۳۰m/s$$

$$(۳): v = a_۳t + v_۲ \Rightarrow v = -۲t + ۳۰$$
$$\xrightarrow{t=۲۰s} v_۳ = -۲ \times ۲۰ + ۳۰ = -۱۰m/s$$

باتوجه‌به نمودار سرعت- زمان، متحرک در بازهٔ زمانی ۰ تا ۱۰ ثانیه، از مبدأ مکان دور شده و دوباره به مبدأ مکان می‌رسد. برای محاسبهٔ بیشترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ کافی است مساحت بالای محور زمان را از بازهٔ $t = ۱۰s$ تا t' به دست آوریم.

$$(۳): v = -۲t + ۳۰ \Rightarrow ۰ = -۲t + ۳۰ \Rightarrow t = ۱۵s$$

یعنی در لحظهٔ $t' = ۱۵ + ۱۵ = ۳۰s$ سرعت در مرحلهٔ سوم صفر می‌شود.

$$|\Delta x| = S_۱ + S_۲ = \left[\frac{۱۰ + ۳۰}{۲} \times (۱۵ - ۱۰)\right] + \left[\frac{۳۰ \times (۳۰ - ۱۵)}{۲}\right] = (۲۰ \times ۵) + (۱۵ \times ۱۵) = ۳۲۵m$$

۳۵ گزینه ۳

معادلهٔ سرعت- زمان را برای بازه زمانی $(۰s - ۴s)$ می‌نویسیم:

$$\text{از ۰ تا ۴ s} \Rightarrow v = a_۱t + v_۰ \xrightarrow{\text{طبق نمودار سؤال: } a_۱=۴m/s^۲} v_۴ = ۴(۴) + v_۰ \Rightarrow v_۴ = ۱۶ + v_۰$$

* تذکر: سرعت متحرک در لحظهٔ $t = ۴s$ سرعت اولیه برای بازهٔ زمانی $(۴s - ۱۰s)$ است.

طبق صورت سؤال، جابجایی کل از ۰ تا ۱۰ ثانیه برابر با ۱۵۶ متر است؛ بنابراین:

$$\Delta x = \Delta x_۱ + \Delta x_۲$$

$$\Rightarrow ۱۵۶ = (\frac{۱}{۲}a_۱t_۱^۲ + v_۰t_۱) + (\frac{۱}{۲}a_۲t_۲^۲ + v_۴t)$$

$$\xrightarrow[t_۲=۱۰-۴=۶s]{t_۱=۴s} ۱۵۶ = (\frac{۱}{۲} \times ۴ \times ۱۶ + ۴v_۰) + (\frac{۱}{۲}(-۴)(۶)^۲ + ۶v_۴)$$

$$\Rightarrow ۱۵۶ = ۳۲ + ۴v_۰ - ۷۲ + ۶v_۴$$

$$\Rightarrow ۱۵۶ = -۴۰ + ۴v_۰ + ۶(۱۶ + v_۰) \Rightarrow ۱۹۶ = ۴v_۰ + ۹۶ + ۶v_۰$$

$$\Rightarrow ۱۰۰ = ۱۰v_۰ \Rightarrow v_۰ = ۱۰m/s$$

۳۶

گزینه ۱

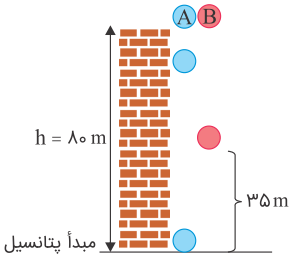
گام اول

الف) از ارتفاع ۸۰ متری بدون سرعت اولیه رها می‌شود ← $y_{\circ A} = ۸۰\,m$

ب) چند ثانیه بعد، گلولهٔ B را از همان ارتفاع رها کنیم تا حداکثر فاصلهٔ آن‌ها ۳۵ متر شود؟ ← $\Delta y_A - \Delta y_B = ۳۵\,,\ y_{\circ B} = ۸۰m\ ,\ t_B - t_A = ?$

گام دوم

حداکثر فاصله بین دو گلوله زمانی رخ می‌دهد که یکی از آن‌ها به زمین رسیده باشد؛ پس در آن لحظه $\Delta y_A = ۸۰\,m$ است. حال با استفاده از معادلهٔ مکان دو گلوله و کم کردن آن‌ها از هم، اختلاف‌زمانی آن‌ها را به دست می‌آوریم (جهت مثبت رو به پایین فرض شود).



$$\begin{cases} \Delta y_A = \frac{۱}{۲} g t_A^۲ \\ \Delta y_B = \frac{۱}{۲} g t_B^۲ \end{cases} \Rightarrow \Delta y_A - \Delta y_B = ۳۵ \Rightarrow ۵t_A^۲ - ۵t_B^۲ = ۳۵ \Rightarrow t_A^۲ - t_B^۲ = ۷$$

برای محاسبهٔ اختلاف زمانی باید t_A و t_B را جداگانه حساب کنیم:

$$\Delta y_A = \frac{۱}{۲} g t_A^۲ \Rightarrow ۵t_A^۲ = ۸۰ \Rightarrow t_A = ۴\ s$$

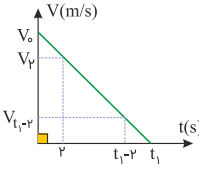
$$t_A^۲ - t_B^۲ = ۷ \Rightarrow ۱۶ - t_B^۲ = ۷ \Rightarrow t_B = ۳\ s$$

$$t_A - t_B = ۴ - ۳ = ۱ s$$

۳۷ گزینه ۲

روش اول: حل عادی

شتاب برابر با شیب نمودار $v-t$ است. $\leftarrow$ $a=-\frac{v_0}{t_1}$



$$v=at+v_0 \Rightarrow \begin{cases} v_2=-2\frac{v_0}{t_1}+v_0 \\ v_{t_1-2}=-\frac{v_0}{t_1}(t_1-2)+v_0 \end{cases}$$

$$\text{۲ ثانیهٔ اول}: \quad \Delta x=\frac{v_2+v_0}{2}\times\Delta t=\frac{(-2\frac{v_0}{t_1}+v_0)+v_0}{2}\times 2 \Rightarrow 36=2v_0-\frac{2v_0}{t_1} \qquad (1)$$

$$\text{۲ ثانیهٔ آخر}: \quad \Delta x=\frac{v+v_{t_1-2}}{2}\Delta t \Rightarrow 4=\frac{0-v_0+\frac{2v_0}{t_1}+v_0}{2}\times 2 \Rightarrow 4=\frac{2v_0}{t_1} \qquad (2)$$

$$\xrightarrow{(2)\to(1)} 36=2v_0-4 \Rightarrow v_0=20\,m/s \Rightarrow t_1=10\,s$$

روش دوم: حل تستی

می‌دانیم در حرکت با شتاب ثابت، در بازه‌های زمانی مساوی، جابه‌جایی‌ها تشکیل تصاعد عددی با قدر نسبت at^2 را می‌دهند.

چون متحرک متوقف شده است می‌توانیم حرکت را از آخر به اول شروع کنیم:

$$\text{قدر نسبت}\ d=at^2 \qquad (I)$$

$$x_1=\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow 4=\frac{1}{2}a\times 2^2 \Rightarrow a=2 \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{(II)\to(I)} d=2(2)^2=8\,m$$

$$\Rightarrow x_1=4\,m$$

$$\Rightarrow x_2=x_1+d=4+8=12\,m$$

$$\Rightarrow x_3=x_2+d=12+8=20\,m$$

$$\Rightarrow x_4=x_3+d=20+8=28\,m$$

$$\Rightarrow x_5=x_4+d=28+8=36\,m$$

درنتیجه جابه‌جایی به ۵ قسمت تقسیم شده که هر قسمت ۲ s طول کشیده است.

$$t_1=5\times 2=10\,s$$

۳۸ گزینه ۱

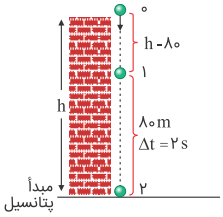
گام اول

الف) ۸۰ متر آخر سقوط را در مدت ۲ ثانیه طی می‌کند ← $|\Delta y| = ۸۰m \ , \ \Delta t = ۲s$

ب) ارتفاع سقوط ؟ ← $h = ?$

گام دوم

معادلهٔ مکان را برای ۸۰ متر آخر نوشته و سرعت را در لحظهٔ ۱ حساب کرده و با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان (از نقطهٔ ۰ تا نقطهٔ ۱)، ارتفاع کل را به دست می‌آوریم: (توجه: جهت مثبت، رو به پایین و مبدأ پتانسیل، زمین فرض شود)



$$\Delta y = -\frac{۱}{۲}gt^{۲} + v_{۱}t \Rightarrow -۸۰ = -۵ \times ۴ + ۲v_{۱} \Rightarrow v_{۱} = -۳۰m/s \Rightarrow |v_{۱}| = ۳۰m/s$$

$$v_{۱}^{۲} = ۲g \times (h - ۸۰) \Rightarrow ۳۰^{۲} = ۲ \times ۱۰ \times (h - ۸۰) \Rightarrow ۴۵ = h - ۸۰ \Rightarrow h = ۱۲۵ \ m$$

۳۹ گزینه ۴

گام اول

الف) قطار A به طول ۲۰۰ متر با سرعت ثابت $۴۰m/s$ ← $a_A = ۰\ ,\ v_A = ۴۰m/s$

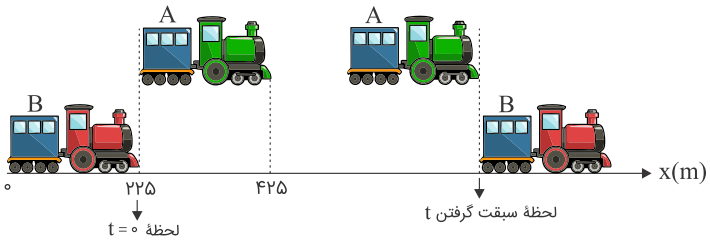
ب) قطار B به طول ۲۲۵ متر هنگامی‌که قطار A از آن عبور می‌کند با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ در همان جهت به راه می‌افتد ← $v_{۰B} = ۰\ ,\ a_B = +۲m/s^۲\ ,\ x_{۰A} = ۲۲۵\ m$

ج) قطار B سرعت خود را به $۵۰m/s$ می‌رساند ← $v_{۱B} = ۵۰\ m/s$

د) قطار B چند ثانیه پس از شروع حرکت، از قطار A سبقت‌گرفته و کاملاً از آن عبور می‌کند ← $t_{سبقت} = ?$

گام دوم

باتوجه‌به شکل، برای ابتدای هر قطار معادله‌ها را نوشته و $t_{سبقت}$ را به دست می‌آوریم. با استفاده از معادلهٔ سرعت- زمان، زمانی که سرعت قطار B، $۵۰m/s$ می‌شود $(t_۱)$ را محاسبه می‌کنیم:



$$v_B = a_B t_۱ + v_{۰B} \Rightarrow ۵۰ = ۲t_۱ \Rightarrow t_۱ = ۲۵s$$

از لحظهٔ $t_۱ = ۲۵s$ به بعد، قطار B با سرعت ثابت $۵۰m/s$ به حرکت خود ادامه می‌دهد. در این لحظه مکان قطار A و B را به کمک معادلهٔ مکان آن‌ها می‌یابیم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t_۱ + x_{۰A} \Rightarrow x_A = ۱۲۲۵m \\ x_B = \frac{۱}{۲} a_B t_۱^۲ + v_{۰B} t_۱ + x_{۰B} \Rightarrow x_B = ۶۲۵m \end{cases}$$

از این پس دو قطار با سرعت ثابت $۴۰\ m/s\ ,\ ۵۰\ m/s$ حرکت می‌کنند و با توجه به رابطهٔ $x_B - x_A = ۲۰۰m$ (لحظه‌ای که قطار B از A کاملاً عبور کرده) زمان سبقت را به دست می‌آوریم:

$$x_A = v_A t_۲ + x_{۰A} \Rightarrow x_A = ۴۰t_۲ + ۱۲۲۵$$

$$x_B = v_B t_۲ + x_{۰B} \Rightarrow x_B = ۵۰t_۲ + ۶۲۵$$

$$(۵۰t_۲ + ۶۲۵) - (۴۰t_۲ + ۱۲۲۵) = ۲۰۰ \Rightarrow t_۲ = ۸۰s$$

درنهایت زمان سبقت از لحظهٔ شروع حرکت برابر است با:

$$t_{سبقت} = t + t_۲ = ۲۵ + ۸۰ = ۱۰۵s$$

۴۰ گزینه ۲

با دو بار استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان برای حرکت شتاب ثابت، داریم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow v^۲ - ۱۰^۲ = ۲(-۲) \times ۲۵ \Rightarrow v = ۰$$
$$\Rightarrow v'^۲ - v^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow v'^۲ - ۰ = ۲(۲)(۶۱ - ۲۵) \Rightarrow v' = ۱۲\ m/s$$

۴۱ گزینه ۱

به دلیل تقارن سهمی می‌توان گفت در لحظهٔ $t = ۴\ s$ سرعت متحرک صفر می‌شود (رأس سهمی).

$$\Delta x = \frac{v + v_۰}{۲}\Delta t \Rightarrow ۲۴ - ۱۶ = \frac{۰ + v_۰}{۲} \times ۴ \Rightarrow v_۰ = ۴\ m/s$$
$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = a \times ۴ + ۴ \Rightarrow a = -۱m/s^۲$$

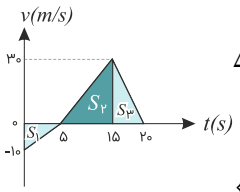
۴۲ گزینه ۳

گام اول

سرعت متوسط جسم در مدت ۲۰ ثانیهٔ نشان داده‌شده ؟ ← $\Delta t = ۲۰s\ ,\ v_{av} = ?$

گام دوم

برای محاسبهٔ سرعت از رابطه $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم. باتوجه‌به این نکته که مساحت زیر نمودار برابر با مقدار جابه‌جایی است جابه‌جایی را به دست آورده و در رابطهٔ بالا جاگذاری می‌کنیم (دقت شود که $S_۱$ پایین محور t است، پس مقدارش منفی است).



$$\Delta x = -S_۱ + S_۲ + S_۳$$

$$\begin{cases} S_۱ = \frac{۵ \times ۱۰}{۲} = ۲۵ \\ S_۲ = \frac{(۱۵ - ۵) \times ۳۰}{۲} = ۱۵۰ \\ S_۳ = \frac{(۲۰ - ۱۵) \times ۳۰}{۲} = ۷۵ \end{cases} \Rightarrow \Delta x = -۲۵ + ۱۵۰ + ۷۵ = ۲۰۰, m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۲۰۰}{۲۰} = ۱۰\, m/s$$

۴۳ گزینه ۳

باتوجه‌به اینکه نمودار مکان- زمان به‌صورت یک سهمی است و سهمی متقارن است؛ و ازآنجاکه ۴ ثانیه طول کشیده تا سرعت متحرک صفر شود، پس ۴ ثانیه دیگر طول می‌کشد تا به قرینهٔ نقطهٔ شروع (جایی که بزرگی سرعت برابر بزرگی سرعت اولیه شود) برسد. بنابراین در کل ۸ ثانیه پس از لحظهٔ $t = ۰$ این اتفاق می‌افتد.

۴۴ گزینه ۲

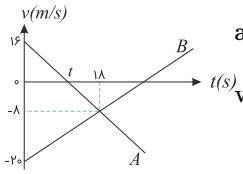
گام اول

الف) در مدتی که متحرک A در جهت محور x حرکت کرده ← $v_A > ۰$

ب) بزرگی جابه‌جایی متحرک B، چند متر است؟ ← $|\Delta x_B| = ?$

گام دوم

ابتدا معادلهٔ سرعت- زمان متحرک A را به دست آورده و سپس مدت‌زمانی که متحرک A در جهت محور x حرکت کرده را محاسبه می‌کنیم:



$$a_{av_A} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-۸ - ۱۶}{۱۸ - ۰} = \frac{-۴}{۳} m/s^۲$$

$$v_A = -\frac{۴}{۳}t + ۱۶ \xrightarrow{v_A = ۰} -\frac{۴}{۳}t + ۱۶ = ۰ \Rightarrow t = ۱۲s$$

حال کافی است معادلهٔ مکان- زمان متحرک B را نوشته و بزرگی جابه‌جایی آن را از لحظهٔ $t = ۰$ تا $t = ۱۲s$ به دست آوریم:

$$a_{av_B} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{-۸ + ۲۰}{۱۸ - ۰} = \frac{۲}{۳} m/s^۲$$

$$x_B = \frac{۱}{۲}a_B t^۲ + (v_۰)_B t + (x_۰)_B \Rightarrow \Delta x_B = \frac{۱}{۲} \times \frac{۲}{۳} \times (۱۲)^۲ + (-۲۰) \times (۱۲)$$

$$\Rightarrow \Delta x_B = ۴۸ - ۲۴۰ = -۱۹۲ \Rightarrow |\Delta x_B| = ۱۹۲m$$

۴۵ گزینه ۳

گام اول

الف) اتومبیلی با سرعت $۲۰m/s$ ← سرعت ثابت و $a_۱ = ۰ \ , \ v_۱ = ۲۰\ m/s$

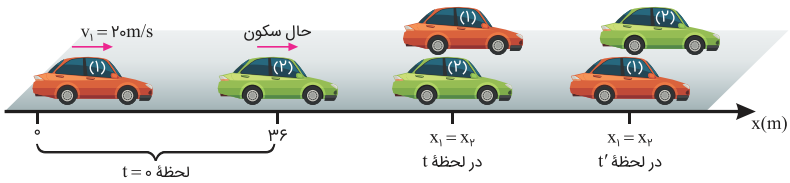
ب) از ۳۶ متر جلوتر اتومبیلی با شتاب ثابت $۲m/s^۲$ از حال سکون در همان جهت ← $x_{۰۲} = ۳۶\ m \ , \ a_۲ = ۲m/s^۲ \ , \ v_{۰۲} = ۰$

ج) دو بار از هم سبقت می‌گیرند ← دو بار مختصات مکانی آن‌ها برابر می‌شود.

د) فاصلهٔ زمانی این دو سبقت ؟ ← $t" - t = ?$

گام دوم

معادلهٔ مکان هر اتومبیل را می‌نویسیم و مساوی هم قرار می‌دهیم تا زمان‌های سبقت گرفتن از هم به دست آید:



$$\text{اتومبیل۱, سرعت ثابت} : x_۱ = v_۱t + x_۰ \xrightarrow{x_۰=۰} x_۱ = ۲۰t$$

$$\text{اتومبیل۲, شتاب ثابت} : x_۲ = \frac{۱}{۲}a_۲t^۲ + v_{۰۲}t + x_۰ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times t^۲ + ۳۶ \ \rightarrow \ x_۲ = t^۲ + ۳۶$$

$$x_۱ = x_۲ \ \rightarrow \ ۲۰t = t^۲ + ۳۶ \rightarrow \begin{cases} t = ۲\ s \\ t" = ۱۸\ s \end{cases}$$

پس فاصلهٔ زمانی بین این دو سبقت برابر است با:

$$\text{فاصله زمانی دو سبقت} : t" - t = ۱۸ - ۲ = ۱۶\ s$$

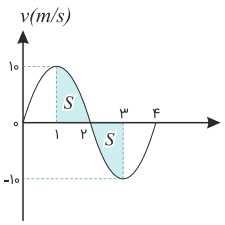
۴۶ گزینه ۲

گام اول

شتاب متوسط و سرعت متوسط در بازهٔ ۱ تا ۳ ثانیه ← $a_{av} = ? \ , \ v_{av} = ? \ : \begin{cases} t_۱ = ۱s \\ t_۲ = ۳s \end{cases}$

گام دوم

شتاب را از رابطه $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آوریم که مقادیر آن همگی از روی نمودار مشخص است.



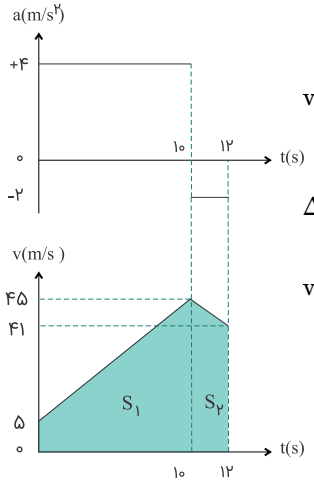
$$\begin{cases} t_۱ = ۱s \ : \ v_۱ = ۱۰\ m/s \\ t_۲ = ۳\ s \ : \ v_۲ = -۱۰\ m/s \end{cases} \Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_۲ - v_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{-۱۰ - ۱۰}{۳ - ۱} = -۱۰m/s^۲$$

برای به دست آوردن سرعت متوسط از رابطهٔ $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم. با توجه به اینکه مساحت زیر نمودار سرعت - زمان، برابر با مقدار جابجایی است، جابجایی از $t = ۲s$ تا $t = ۳s$ برابر صفر است، درنتیجه سرعت متوسط صفر است.

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۰}{۲} = ۰\ m/s$$

۴۷ گزینه ۴

برای محاسبهٔ سرعت متوسط متحرک در این بازه، نمودار سرعت- زمان را رسم می‌کنیم و از روی نمودار سرعت- زمان، مقدار جابه‌جایی و درنهایت سرعت متوسط متحرک را به دست می‌آوریم:



$$v = at + v_۰ \Rightarrow \begin{cases} v_۱ = a_۱ t_۱ + v_۰ = ۴ \times ۱۰ + ۵ = ۴۵\,m/s \\ v_۲ = a_۲ t_۲ + v_۱ = -۲ \times ۲ + ۴۵ = ۴۱\,m/s \end{cases}$$

$$\Delta x = S_۱ + S_۲ = \left(\frac{۵ + ۴۵}{۲} \times ۱۰\right) + \left(\frac{۴۵ + ۴۱}{۲} \times ۲\right) = ۲۵۰ + ۸۶ = ۳۳۶\,m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۳۳۶}{۱۲} = ۲۸\,m/s$$

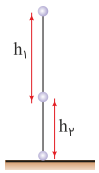
۴۸ گزینه ۴

فقط نیروی وزن روی جسم کار انجام می‌دهد بنابراین کار انجام‌شده در ثانیهٔ آخر حرکت برابر با کار نیروی وزن گلوله است:

$$W = mgh_۲ \Rightarrow ۷۰ = ۰/۲ \times ۱۰ \times h_۲ \Rightarrow h_۲ = ۳۵\,m$$

حال به دو روش می‌توانیم پاسخ سؤال را ادامه دهیم:

* ادامهٔ پاسخ از روش اول:



جهت بالا را مثبت و مبدأ مکان را محل رها شدن جسم فرض می‌کنیم.

معادلهٔ حرکت سقوط آزاد را یک‌بار برای کل مسیر و یک‌بار برای قسمت اول مسیر می‌نویسیم:

$$y = -\frac{۱}{۲}gt^۲ + y_۰ \Rightarrow \begin{cases} \text{کل مسیر}: \; h = -\frac{۱}{۲}(-۱۰)t^۲ = ۵t^۲ \qquad (۱) \\ (t-۱)s \text{ از ابتدا تا لحظهٔ}: \; h_۱ = h - h_۲ = -\frac{۱}{۲}(-۱۰)(t-۱)^۲ = ۵(t-۱)^۲ \qquad (۲) \end{cases}$$

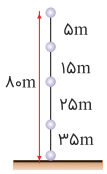
$$\xrightarrow{\text{تفاضل دو رابطهٔ (۱) , (۲)}} h - (h - h_۲) = ۵t^۲ - ۵(t-۱)^۲ = ۵t^۲ - ۵(t^۲ - ۲t + ۱) = ۱۰t - ۵$$

$$\xrightarrow{h_۲ = ۳۵\,m} ۳۵ = ۱۰t - ۵ \Rightarrow t = ۴\,s \qquad (۳)$$

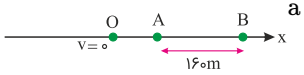
$$\xrightarrow{(۳) \Rightarrow (۲)} h - ۳۵ = ۵(۴-۱)^۲ \Rightarrow h = ۳۵ + ۴۵ = ۸۰\,m$$

** ادامهٔ پاسخ از روش دوم:

در سقوط آزاد مسافت طی‌شده در هر ثانیه، تشکیل تصاعد حسابی با قدرنسبت ۱۰ می‌دهد و جملهٔ اول تصاعد $\frac{g}{۲}$ است. در این سؤال مسافت طی‌شده در ثانیهٔ آخر را به دست آوردیم، داریم:



۴۹ گزینه ۲



$$a = ۲\,m/s^۲$$

$$x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰ \xrightarrow{a=۲m/s^۲\,,\,v_۰=۰\,,\,x_۰=۰} x = t^۲ \Rightarrow \begin{cases} OA = t_{OA}^۲ & (۱) \\ OB = t_{OB}^۲ \Rightarrow OA + ۱۶۰ = (t_{OA} + ۸)^۲ & (۲) \end{cases}$$

$$\xrightarrow{(۱)\Rightarrow(۲)} t_{OA}^۲ + ۱۶۰ = t_{OA}^۲ + ۱۶t_{OA} + ۶۴ \Rightarrow ۱۶t_{OA} = ۹۶ \Rightarrow t_{OA} = ۶\,s$$

$$OA = t_{OA}^۲ \Rightarrow OA = ۶^۲ = ۳۶\,m$$

۵۰ گزینه ۲

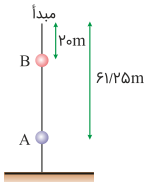
در نمودار مکان- زمان نقطهٔ مینیمم جایی است که سرعت متحرک صفر می‌شود.

$$\Delta x = \frac{v + v_۰}{۲}\Delta t \Rightarrow ۰ - ۱۸ = \frac{۰ + v_۲}{۲} \times ۶ \Rightarrow v_۰ = -۶\,m/s$$

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = a \times ۶ - ۶ \Rightarrow a = ۱\,m/s^۲$$

۵۱ گزینه ۴

بهترین راه‌حل این است که در نظر بگیریم گلولهٔ A به مدت $۳/۵\,s$ و گلولهٔ B به مدت $۲\,s$ سقوط کرده‌اند.



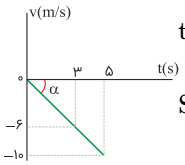
$$|h_A| = |-\frac{۱}{۲}gt^۲| = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times (۳/۵)^۲ = ۶۱/۲۵m$$

$$|h_B| = |-\frac{۱}{۲}gt^۲| = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times (۲)^۲ = ۲۰m$$

$$\Delta h = |h_A - h_B| = ۶۱/۲۵ - ۲۰ = ۴۱/۲۵\,m$$

۵۲ گزینه ۳

سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر مسافت پیموده شده است. کافی است سرعت متحرک را در لحظهٔ $t = ۵\,s$ بیابیم.



$$\tan\alpha = \frac{۶}{۳} = \frac{v}{۵} \Rightarrow v = ۱۰\,m/s$$

$$S = \frac{۵ \times ۱۰}{۲} = ۲۵\,m$$

نکته: چون متحرک تغییر جهت نداده بنابراین جابه‌جایی متحرک و مسافت طی‌شده باهم برابرند؛ لذا مساحت سطح زیر نمودار سرعت- زمان برابر مسافت پیموده شده و همچنین جابه‌جایی متحرک است.

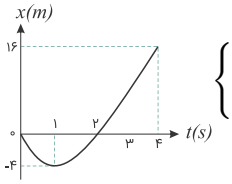
۵۳ گزینه ۱

طبق معادلهٔ $x = ۲t^۲ + ۴t - ۸$ حرکت با شتاب ثابت است و چون شتاب و سرعت اولیهٔ حرکت هم‌علامت‌اند نتیجه می‌گیریم که حرکت تندشونده بدون تغییر جهت است و در این حالت مسافت پیموده شده و جابه‌جایی باهم مساوی هستند.

$$x = ۲t^۲ + ۴t - ۸ \Rightarrow \begin{cases} a = ۴\,m/s^۲ \\ v_۰ = ۴\,m/s \end{cases}$$

۵۴ گزینه ۳

باتوجه‌به نمودار مکان- زمان، مکان متحرک در لحظه‌های ۰ و ۴s برابر است با:



$$\begin{cases} t = ۰s \Rightarrow x = ۰m \\ t = ۴s \Rightarrow x = ۱۶m \end{cases}$$

حال مقادیر به‌دست‌آمده را در معادلهٔ سرعت متوسط جایگذاری می‌کنیم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_۲ - x_۱}{t_۲ - t_۱} = \frac{۱۶ - ۰}{۴ - ۰} = \frac{۱۶}{۴} = ۴m/s$$

۵۵ گزینه ۲

$$\text{متحرک A}: \ \Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + \cancel{v_۰t}^{\,۰} \Rightarrow ۷۵ = \frac{۱}{۲}(۱/۵)t^۲ \Rightarrow t = ۱۰s$$

$$\text{متحرک B}: \ \Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + \cancel{v_۰t}^{\,۰} \Rightarrow ۱۵۰ = \frac{۱}{۲}a(۱۰)^۲ \Rightarrow a_B = ۳\,m/s^۲$$

$$\left.\begin{array}{l} v_A = at + v_۰ = ۱/۵ \times ۱۰ + ۰ = ۱۵\,m/s \\ v_B = at + v_۰ = ۳ \times ۱۰ + ۰ = ۳۰\,m/s \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{v_B}{v_A} = \frac{۳۰}{۱۵} = ۲$$

۵۶ گزینه ۲

گام اول

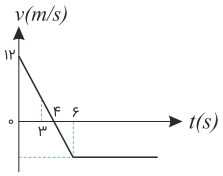
بزرگی شتاب متوسط در بازهٔ زمانی ۳ تا ۶ ثانیه؟ $\leftarrow a_{av_{(۳s-۶s)}} = ?$

گام دوم

چون در بازهٔ زمانی ۰ تا ۶ ثانیه شتاب (شیب) ثابت است، پس شتاب متوسط در تمامی بازه‌های زمانی بین زمان‌های ۰ تا ۶ ثانیه باهم برابر است یعنی:

$$a_{av_{(۰-۶s)}} = a_{av_{(۰-۴s)}} = a_{av_{(۳s-۶s)}}$$

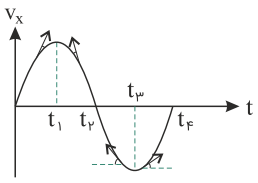
$$\left|a_{av_{(۳s-۶s)}}\right| = \left|a_{av_{(۰-۴s)}}\right| = \frac{|\Delta v|}{|\Delta t|} = \frac{|۰ - ۱۲|}{|۴ - ۰|} = ۳\,m/s^۲$$



۵۷ گزینه ۱

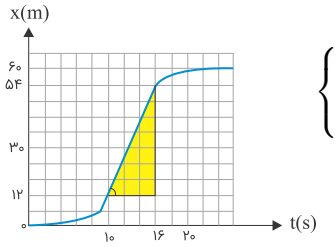
بازه‌های زمانی که شیب‌شان مثبت باشد (مطابق نمودار) ۰ تا $t_۱$ و $t_۳$ تا $t_۴$ است. پس با توجه به اینکه شیب در نمودار سرعت - زمان، همان شتاب است، درمی‌یابیم که شتاب در این بازه‌ها مثبت است.

از طرفی چون شتاب مثبت است، بردار شتاب متحرک در جهت مثبت محور x است.



۵۸ گزینه ۳

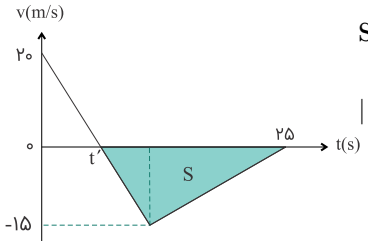
در نمودار مکان- زمان، شیب مماس بر نمودار بیانگر سرعت است. ازآنجاکه بیشینهٔ سرعت را می‌خواهیم، کافی است بیشترین شیب مماس بر نمودار را بیابیم. مطابق نمودار داریم:



$$\begin{cases} m_{max} = \dfrac{۵۴ - ۱۲}{۱۶ - ۱۰} = ۷ \\ v_{max} = m_{max} \end{cases} \Rightarrow v_{max} = ۷ m/s$$

۵۹ گزینه ۳

مساحت زیر نمودار $v - t$، برابر است با مقدار جابه‌جایی متحرک. ازطرفی باتوجه‌به اینکه بازه‌ای را می‌خواهیم که متحرک خلاف جهت محور x حرکت کرده، داریم: (بازه t' تا ۲۵)

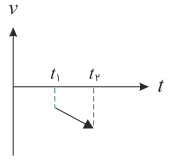


$$S = |\Delta x| = \frac{(۲۵ - t')}{۲} \times ۱۵$$

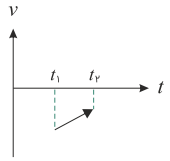
$$|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{(۲۵ - t')}{۲} \times ۱۵ \times \frac{۱}{(۲۵ - t')} = ۷/۵ \, m/s$$

۶۰ گزینه ۱

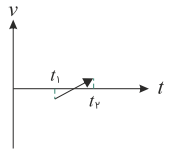
با توجه به پیوسته تندشونده بودن حرکت، اندازهٔ سرعت باید در حال افزایش باشد و یا $av > 0$ باشد (شیب در نمودار سرعت- زمان، شتاب است).
گزینه ها را بررسی می کنیم:



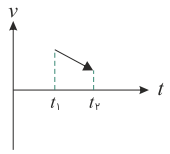
گزینهٔ ۱: اندازهٔ سرعت در حال افزایش است پس حرکت تندشونده است (از طرفی $av > 0$ است).



گزینهٔ ۲: اندازهٔ سرعت در حال کاهش است پس حرکت کندشونده است ($av < 0$).
گزینهٔ ۳: ابتدا اندازهٔ سرعت در حال کاهش و سپس افزایش است، پس حرکت ابتدا کندشونده و سپس تندشونده است (ابتدا $av < 0$ و سپس $av > 0$).



گزینهٔ ۴: اندازهٔ سرعت در حال کاهش است، پس حرکت کندشونده است ($av < 0$).

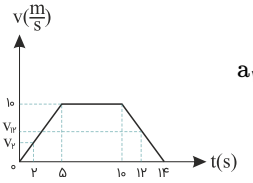


گزینهٔ ۱ درست است.

۶۱ گزینه ۱

شتاب متوسط از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ به دست می‌آید، پس برای اینکه شتاب متوسط در بازه زمانی $t = ۲s$ تا $t = ۱۲s$ را به دست بیاوریم، باید سرعت در این لحظه‌ها را محاسبه کنیم.

شیب (شتاب) نمودار در بازه ۵ − ۰ ثانیه برابر است با:



$$a_{۱_{av}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۱۰ - ۰}{۵ - ۰} = ۲m/s^۲$$

باتوجه‌به آنکه شیب (شتاب) ثابت است می‌توانیم سرعت را در لحظهٔ $t = ۲s$ به دست آوریم.

$$v_۱ = a_{۱_{av}} t_۱ + v_{۰۱} \Rightarrow v_۱ = ۲ \times ۲ + ۰ = ۴m/s$$

در بازه زمانی ۱۴ − ۱۰ ثانیه هم به همین صورت داریم:

$$a_{۲_{av}} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۰ - ۱۰}{۱۴ - ۱۰} = \frac{-۱۰}{۴} = -۲/۵$$

سرعت در لحظهٔ $t = ۱۲s$ هم به دست می آید.

$$v_۲ = a_{۲_{av}} t_۲ + (v_۰)_۲ \Rightarrow v_۲ = -۲/۵ \times ۲ + ۱۰ = ۵m/s$$

دقت شود که معادلهٔ این خط را از $t = ۱۰s$ ، یعنی دو ثانیه پس از لحظهٔ $t = ۱۲s$، نوشتیم.

حال کافی است مقادیر سرعت در لحظات $t = ۱۲$ و $t = ۲$ را در رابطهٔ شتاب متوسط جایگذاری کنیم:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{۱۲} - v_۲}{\Delta t} = \frac{۵ - ۴}{۱۲ - ۲} = ۰/۱ m/s^۲$$

۶۲ گزینه ۱

گام اول

الف) نمودار مکان- زمان به صورت سهمی ← شتاب ثابت

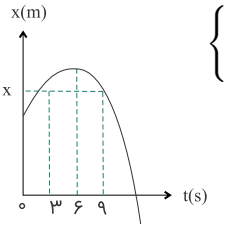
ب) مسافت طی‌شده در بازهٔ $t = ۳s$ تا $t = ۹s$ برابر ۱۲ متر ← $\Delta t = ۹ - ۳ = ۶s, d = ۱۲m$

ج) جابه‌جایی متحرّک چند متر است؟ ← $\Delta x = ?$

گام دوم

باتوجه‌به نمودار مکان- زمان، متحرک در لحظهٔ $t = ۶s$ (لحظه‌ای که سرعت صفر شده) تغییر جهت می‌دهد. پس لزوماً مقدار مسافت طی‌شده برابر جابه‌جایی نیست.

ازطرفی $t = ۶s$، وسط بازهٔ ۳ تا ۹ ثانیه می‌باشد؛ پس مکان لحظهٔ $t_۱ = ۳s$ با مکان لحظهٔ $t_۲ = ۹s$ برابر است، بنابراین:



$$\begin{cases} t_۱ = ۳s \Rightarrow x_۱ = x \\ t_۲ = ۹s \Rightarrow x_۲ = x \end{cases} \Rightarrow \Delta x = ۰$$

۶۳ گزینه ۴

شتاب همواره مثبت است، پس اگر:

الف) متحرک با سرعت اولیهٔ منفی شروع به حرکت کند، حرکت آن ابتدا کندشونده است، سپس تندشونده است.

ب) متحرک با سرعت اولیهٔ صفر و یا مثبت شروع به حرکت کند، حرکت آن تندشونده می‌باشد.

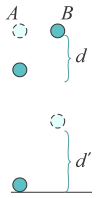
بنابراین حرکت متحرک به سرعت اولیه بستگی دارد.

۶۴ گزینه ۳

گام اول

لحظه‌ای بعد از اولین گلوله، گلولهٔ دیگری از همان نقطه رها می‌شود ← $t_B = t_A - \Delta t$

گام دوم



فاصلهٔ گلوله‌ها را در دو حالت بررسی می‌کنیم:

بار اول در لحظه‌ای که گلولهٔ دوم رها می‌شود:

$$d = |y_A - y_B| = \frac{۱}{۲}g(t_A^۲ - t_B^۲) = \frac{۱}{۲}g\underbrace{(t_A - t_B)}_{\Delta t}(t_A + t_B) \Rightarrow d = \frac{۱}{۲}g\Delta t(t_A + t_B) \qquad (۱)$$

بار دوم لحظه‌ای که گلولهٔ اول به زمین می‌رسد:

$$d" = |y"_A - y"_B| = \frac{۱}{۲}g\left[(t"_A)^۲ - (t"_B)^۲\right] = \frac{۱}{۲}g\underbrace{(t"_A - t"_B)}_{\Delta t}(t"_A + t"_B) \qquad (۲)$$

که در هر دوی این رابطه‌ها، Δt فاصلهٔ زمانی بین رها شدن گلولهٔ اول و دوم است و مقداری ثابت است.

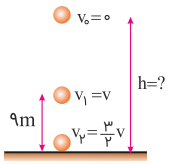
حال d و $d"$ را مقایسه می‌کنیم:

$$\text{باتوجه به اینکه}: \begin{cases} t"_A > t_A \\ t"_B > t_B \end{cases} \Rightarrow \quad t"_A + t"_B > t_A + t_B \qquad (۳)$$

به این ترتیب داریم:

$$\xrightarrow{(۱),(۲),(۳)} d" > d$$

۶۵ گزینه ۱



جهت بالا را مثبت و مبدأ را محل رها شدن گلوله فرض می‌کنیم.

معادلهٔ مستقل از زمان در حرکت سقوط آزاد را یک‌بار برای قسمت اول و بار دیگر برای کل مسیر می‌نویسیم:

$$v_۱^۲ = -۲g(y_۱ - y_۰) \Rightarrow v^۲ = -۲ \times ۱۰ \times [-(h - ۹) - ۰] \Rightarrow v^۲ = -۲۰ \times (-h + ۹) \qquad (۱)$$

$$v_۲^۲ = -۲g(y_۲ - y_۰) \Rightarrow (\frac{۳}{۲}v)^۲ = -۲ \times ۱۰ \times (-h - ۰) \Rightarrow \frac{۹}{۴}v^۲ = -۲۰ \times (-h) \qquad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۲)-(۱)} \frac{۹}{۴}v^۲ - v^۲ = -۲۰[(-h) - (-h + ۹)] \Rightarrow \frac{۵}{۴}v^۲ = -۲۰ \times (-۹) \Rightarrow \frac{۵}{۴}v^۲ = ۱۸۰ \Rightarrow v^۲ = ۱۴۴\ m^۲/s^۲$$

با جایگذاری مقدار $v^۲$ در رابطهٔ (۲) داریم:

$$\frac{۹}{۴}v^۲ = -۲۰ \times (-h) \xrightarrow{v^۲ = ۱۴۴\ m^۲/s^۲} \frac{۹}{۴} \times (۱۴۴) = ۲۰h \Rightarrow h = ۱۶/۲\ m$$

۶۶ گزینه ۳

با توجه به تقارن نمودار نسبت به $t = ۴\,s$، تندی متحرک در $t = ۰$ و $t = ۸\,s$ باهم برابر و سرعت در این دو لحظه قرینه یکدیگر است.

$$\left.\begin{array}{l} t = ۰ \Rightarrow v = ?\,,\ x = ۱۲\,m \\ t = ۴\,s \Rightarrow v = ۰\,,\ x = ۰ \end{array}\right\} \Rightarrow \Delta x = \frac{v + v_۰}{۲}\Delta t \Rightarrow -۱۲ = \frac{۰ + v_۰}{۲} \times ۴$$

$$\Rightarrow v_۰ = -۶\,m/s \Rightarrow v_{۸\,s} = +۶\,m/s$$

۶۷ گزینه ۴

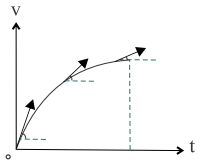
کافی است برای این سؤال از معادلهٔ مستقل از شتاب در حرکت شتاب ثابت استفاده کنیم.

$$\Delta x = \frac{v + v_۰}{۲}\Delta t \Rightarrow (-۱۲۲/۵ - ۰) = \frac{v + ۰}{۲} \times ۵ \Rightarrow v = -۴۹\,m/s$$

در صورت سؤال بزرگی سرعت خواسته شده است و گزینهٔ "۴" درست است.

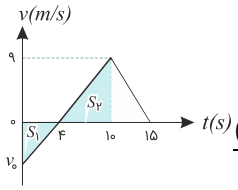
۶۸ گزینه ۴

سرعت در حال افزایش است پس حرکت تند شونده است. از طرفی شیب در نمودار سرعت - زمان، همان شتاب است؛
و چون شیب نمودار در هر نقطه متفاوت بوده پس شتاب متغیر است. درنتیجه حرکت تند شونده و با شتاب متغیر است.



۶۹ گزینه ۱

برای محاسبهٔ شتاب متوسط از رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم. برای این منظور باید سرعت در لحظات $t = ۰$ و $t = ۱۵s$ را داشته باشیم.



باتوجه‌به نمودار و نسبت تشابه دو مثلث $S_۱$ و $S_۲$ داریم:

$$\frac{(۱۰ - ۴)}{۴} = \frac{۹}{|v_۰|} \Rightarrow |v_۰| = ۶\,m/s \Rightarrow v_۰ = -۶m/s$$

(علامت منفی سرعت اولیه به خاطر این است که پایین محور زمان قرار دارد).

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{۰ - (-۶)}{۱۵ - ۰} = \frac{۶}{۱۵} = ۰/۴\,m/s^۲$$

۷۰ گزینه ۲

مساحت زیر نمودار سرعت-زمان، برابر است با مقدار جابه‌جایی. پس کافی است مطابق شکل زیر مساحت قسمت هاشورخورده را محاسبه کنیم.
برای این منظور معادلهٔ سرعت- زمان را به دست می‌آوریم.

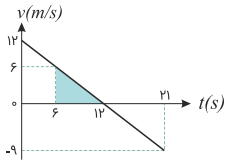
$$\begin{cases} v = at + v_۰ \\ v_۰ = ۱۲\,m/s \\ \text{شیب خط}: a = \dfrac{(-۹)-(+۱۲)}{۲۱-۰} = -۱\,m/s^۲ \end{cases} \Rightarrow v = -t + ۱۲$$

سرعت متحرک در لحظه‌های $t = ۶s$ و $t = ۱۲s$ برابر است با:

$$\begin{cases} t_۱ = ۶s \Rightarrow v_۱ = -۶ + ۱۲ = ۶\,m/s \\ t_۲ = ۱۲s \Rightarrow v_۲ = -۱۲ + ۱۲ = ۰\,m/s \end{cases}$$

نمودار به صورت زیر است. پس مقدار جابه‌جایی را می‌توانیم بیابیم.

$$\begin{cases} S = \dfrac{(۱۲-۶)\times ۶}{۲} = ۱۸ \\ \Delta x = S \end{cases} \Rightarrow \Delta x = ۱۸\,m$$



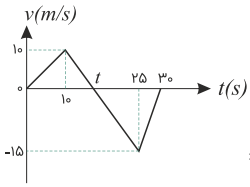
۷۱ گزینه ۲

گام اول

بزرگی سرعت متوسط در مدتی که مخالف محور x حرکت می‌کند؟ ← $v_{av} = ?$ در مدتی که $v < ۰$

گام دوم

برای به دست آوردن بزرگی سرعت متوسط باید از رابطهٔ $|v_{av}| = \dfrac{|\Delta x|}{|\Delta t|}$ استفاده کنیم. مطابق نمودار باید زمان t که سرعت صفر می‌شود را به دست آوریم (با استفاده از معادلهٔ سرعت- زمان در بازهٔ زمانی ۱۰s تا ۲۵s):



$$\begin{cases} a_{av} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{-۱۵-۱۰}{۲۵-۱۰} = \dfrac{-۵}{۳}\,m/s^۲ \\ t_۱ = ۱۰\,s \;:\; v_۱ = ۱۰\,m/s \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{معادلهٔ خط}: y - y_۰ = m(x - x_۰) \\ \text{معادلهٔ سرعت}: v - v_۱ = a(t - t_۱) \end{matrix}$$

$$\Rightarrow ۰ - ۱۰ = -\frac{۵}{۳}(t - ۱۰) \Rightarrow t = ۱۶s$$

حالا باید جابه‌جایی را از بازهٔ زمانی $t = ۱۶s$ تا $t = ۳۰s$ (زمانی که سرعت منفی است) به دست آوریم (دقت شود که جابه‌جایی منفی است، چون نمودار زیر محور زمان است).

$$\begin{cases} \Delta x = -S \\ S = \dfrac{۱۵\times(۳۰-۱۶)}{۲} = ۱۰۵ \end{cases} \Rightarrow \Delta x = -۱۰۵m$$

جابه‌جایی و تغییرات زمان را در رابطهٔ $|v_{av}| = \dfrac{|\Delta x|}{|\Delta t|}$ قرار می‌دهیم:

$$|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{|\Delta t|} = \frac{۱۰۵}{۱۴} = ۷/۵m/s$$

۷۲ گزینه ۳

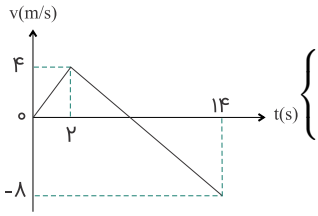
گام اول

چند ثانیه در سوی مخالف محور x حرکت کرده؟ ← $v < ۰\ ,\ \Delta t = ?$

گام دوم

مطابق نمودار، مدت‌زمانی که در جهت مخالف حرکت کرده، یعنی علامت سرعتش منفی بوده است، از t تا ۱۴ ثانیه است. بنابراین t را باید بیابیم:

با توجه به نقاط داده‌شده، از لحظهٔ $t = ۲s$ تا $t = ۱۴s$ معادلهٔ سرعت (معادلهٔ خط) را به دست می‌آوریم:



$$\begin{cases} a_{av} = \dfrac{\Delta v}{\Delta t} = \dfrac{-۸-۴}{۱۴-۲} = -۱m/s^۲ \\ t_۱ = ۲\,s\ :\ v_۱ = ۴\,m/s \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \text{معادله خط}:\ y - y_۰ = m(x - x_۰) \\ \text{معادله سرعت}:\ v - v_۱ = a(t - t_۱) \end{matrix} \Rightarrow v = -۱(t-۲) + ۴ \Rightarrow v = -t + ۶$$

برای محاسبهٔ t، مطابق نمودار، سرعت را برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$v = -t + ۶ \Rightarrow ۰ = -t + ۶ \Rightarrow t = ۶s$$

پس مدت‌زمانی که متحرک در جهت مخالف محور x بوده از $t = ۶s$ تا $t = ۱۴s$ است یعنی: $۱۴ - ۶ = ۸s$

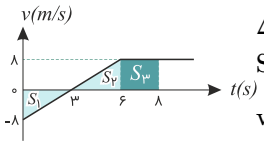
۷۳ گزینه ۱

گام اول

سرعت متوسط جسم در ۸ ثانیهٔ نشان داده‌شده ؟ ← $\Delta t = ۸s\ ,\ v_{av} = ?$

گام دوم

برای محاسبهٔ سرعت از رابطه $v_{av} = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ استفاده می‌کنیم. ازآنجایی‌که مساحت زیر نمودار سرعت- زمان، برابر مقدار جابه‌جایی است و باتوجه‌به اینکه $S_۱$ و $S_۲$ قرینهٔ همدیگرند، مقدار جابه‌جایی را به دست آورده و در رابطهٔ بالا جایگذاری می‌کنیم:



$$\Delta x = -S_۱ + S_۲ + S_۳ \xrightarrow{S_۱ = S_۲} \Delta x = S_۳$$

$$S_۳ = (۸-۶) \times (۸-۰) = ۱۶ \Rightarrow \Delta x = ۱۶m$$

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{۱۶}{۸} = ۲\,m/s$$

۷۴ گزینه ۲

گام اول

الف) متحرک با سرعت متوسط $۶/۴\ m/s \leftarrow v_{av} = ۶/۴\ m/s$

ب) سرعت اولیه چند متر بر ثانیه؟ $\leftarrow v_۰ = ?$

گام دوم

ابتدا جابجایی را با استفاده از معادلهٔ مکان و سرعت متوسط به دست می‌آوریم و بعد به کمک تغییرات سرعت، سرعت اولیه را حساب می‌کنیم:

جابجایی در بازه زمانی ۰ تا۲s:

$$\begin{cases} \Delta x_۱ = \frac{۱}{۲}a_۱ {t_۱}^۲ + v_۰ t_۱ \\ a_۱ = ۲\ m/s^۲ \\ t_۱ = ۲s \end{cases} \Rightarrow \Delta x_۱ = ۴ + ۲v_۰$$

جابجایی در بازهٔ زمانی ۲s تا ۵s:

$$\begin{cases} \Delta x_۲ = \frac{۱}{۲}a_۲ {t_۲}^۲ + v_۱ t_۲ \\ a_۲ = -۲m/s^۲ \\ t_۲ = ۳s \end{cases} \Rightarrow \Delta x_۲ = -۹ + ۳v_۱$$

بنابراین جابجایی کل برابر است با:

$$\Delta x_T = \Delta x_۱ + \Delta x_۲ = ۴ + ۲v_۰ - ۹ + ۳v_۱ = ۳v_۱ + ۲v_۰ - ۵ \qquad (I)$$

از طرفی $v_{av} = ۶/۴m/s$ است، بنابراین:

$$v_{av} = \frac{\Delta x_T}{\Delta t_T} \Rightarrow \frac{۶۴}{۱۰} = \frac{\Delta x_T}{۵} \Rightarrow \Delta x_T = ۳۲m \qquad (II)$$

$$\xrightarrow{(I),(II)} ۳۲ = ۳v_۱ + ۲v_۰ - ۵ \Rightarrow ۳v_۱ + ۲v_۰ = ۳۷$$

باتوجه‌به اینکه مساحت زیر نمودار $a - t$، برابر با Δv است، داریم:

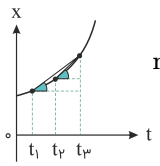
$$\begin{cases} \Delta v = S \\ S = ۲ \times ۲ = ۴ \end{cases} \Rightarrow \Delta v = ۴ \Rightarrow v_۱ - v_۰ = ۴$$

درنهایت با حل دستگاه زیر، سرعت اولیه را می‌یابیم:

$$\begin{cases} v_۱ - v_۰ = ۴ \\ ۳v_۱ + ۲v_۰ = ۳۷ \end{cases} \Rightarrow ۳(۴ + v_۰) + ۲v_۰ = ۳۷ \Rightarrow v_۰ = ۵m/s$$

۷۵ گزینه ۳

با وصل کردن دونقطه در نمودار مکان - زمان و محاسبهٔ شیب، سرعت متوسط در آن بازهٔ زمانی به دست می‌آید. پس نقاط ۱ و ۲ و ۳ را به هم وصل می‌کنیم. با توجه به شیب‌های به‌دست‌آمده در بازه های زمانی مختلف، می‌فهمیم که در بازهٔ زمانی $t_۲$ تا $t_۳$، شیب بیشتر است؛ پس سرعت متوسط بیشتری هم دارد.



$$m_{۲۳} > m_{۱۳} > m_{۱۲} \rightarrow v_{۲۳} > v_{۱۳} > v_{۱۲}$$

۷۶ گزینه ۴

گام اول

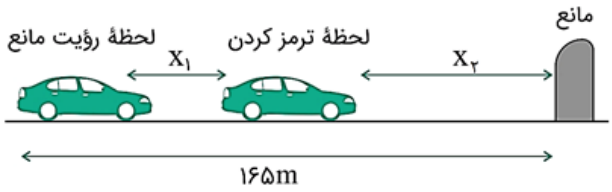
الف) اتومبیلی روی خط راست با سرعت $۱۰۸\,km/h$ در حال حرکت است. ← $v_۰ = ۱۰۸\,km/h = \frac{۱۰۸}{۳/۶} = ۳۰\,m/s$

ب) راننده با دیدن مانعی در فاصلهٔ $۱۶۵\,m$ ← $۱۶۵\,m =$ فاصلهٔ اتومبیل از مانع در لحظهٔ دیدن آن

ج) با شتاب ثابت $۳\,m/s^۲$ ترمز می‌کند و جلوی مانع می‌ایستد ← $a = -۳\,m/s^۲$

گام دوم

باتوجه‌به شکل زیر و معادلهٔ سرعت- زمان خواهیم داشت:



$$x_۲ = \frac{-v_۰^۲}{۲a} = \frac{-(۳۰)^۲}{-۲ \times ۳} = ۱۵۰\,m$$

$$x_۱ = ۱۶۵ - x_۲ = ۱۶۵ - ۱۵۰ = ۱۵\,m$$

$$v = \frac{x_۱}{t_۱} \Rightarrow t_۱ = \frac{۱۵}{۳۰} = \frac{۱}{۲}\,s$$

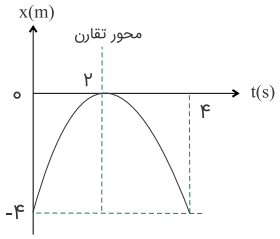
$$v = at_۲ + v_۰ \Rightarrow ۰ = -۳ \times t_۲ + ۳۰ \Rightarrow t_۲ = ۱۰\,s$$

$$\frac{t_۲}{t_۱} = \frac{۱۰}{\frac{۱}{۲}} = ۲۰$$

۷۷ گزینه ۴

روش اول)

نمودار مکان - زمان را رسم می‌کنیم:



معادله سهمی : $x = -t^{۲} + ۴t - ۴ \Rightarrow$ رأس سهمی : $t = \frac{-۴}{-۲} = ۲\,s$

مطابق نمودار، وسط بازه زمانی ۰ تا ۴ ثانیه، یعنی $t = ۲s$، محور تقارن است و جهت حرکت جسم عوض می‌شود. پس مسافت طی شده در ۴ ثانیه برابر است با دو برابر جابجایی از ۰ تا لحظهٔ ۲s:

$$\Delta x = x_{۲} - x_{۱} \Rightarrow \Delta x = +۴\,m$$

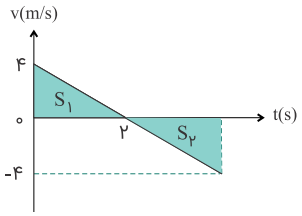
$$\text{مسافت طی‌شده از ۰ تا ۴ ثانیه} = ۲\Delta x = ۲ \times ۴ = ۸\,m$$

روش دوم)

معادلهٔ سرعت را به دست می‌آوریم و با استفاده از رسم نمودار $v - t$ مسافت طی‌شده را حساب می‌کنیم:

$$x = -t^{۲} + ۴t - ۴ \Rightarrow \begin{cases} a = -۲\,m/s^{۲} \\ v_{۰} = ۴\,m/s \end{cases} \Rightarrow v = -۲t + ۴$$

t(s)	۰	۲	۴
v(m/s)	۴	۰	-۴



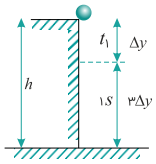
قدر مطلق مساحت زیر نمودار $v - t$ برابر با مسافت طی شده است:

$$\text{مسافت طی‌شده} = |S_{۱}| + |S_{۲}| = \left|\frac{۴ \times ۲}{۲}\right| + \left|\frac{-۴ \times ۲}{۲}\right| = ۸\,m$$

۷۸ گزینه ۱

روش اول:

باتوجه‌به شکل زیر داریم:



$$\begin{cases}\Delta y_1 = \frac{-1}{2}gt_1^2 \\ \Delta y_{کل} = \Delta y_1 + 3\Delta y_1 = \frac{-1}{2}gt_{کل}^2\end{cases}$$

$$\xrightarrow{v_0=0\,,\ t_{کل}=t_1+1}\begin{cases}\Delta y_1 = \frac{-1}{2}gt_1^2 \\ \Delta y_{کل} = \frac{-1}{2}g(t_1+1)^2\end{cases}\xrightarrow[\Delta y_{کل}-\Delta y_1=3\Delta y_1]{تفاضل} -5(t_1^2+2t_1+1)-(-5t_1^2)=3(-5t_1^2)$$

$$\Rightarrow 15t_1^2-10t_1-5=0 \Rightarrow \begin{cases}t_1 = 1s & ق.ق \\ t_1 = -\frac{1}{3} & غ.ق.ق\end{cases}$$

پس زمان کل حرکت : $t = 1 + t_1 = 1 + 1 = 2\,s$ است و بنابراین:

$$h = |\Delta y_{کل}| = |-5t^2| = 20m$$

روش دوم:

دنبالهٔ عددی جابه‌جایی (در هر ثانیه) در حرکت سقوط آزاد، با شتاب $g = 10\,m/s^2$ برابر است با:

$$5\,,\ 15\,,\ 25\,,\ 35\,,\ \ldots$$

باتوجه‌به دنبالهٔ بالا، جملهٔ دوم سه برابر جملهٔ اول است، بنابراین ارتفاع h برابر است با:

$$h = 5 + 15 = 20\,m$$

۷۹ گزینه ۴

ابتدا از روی معادلهٔ مکان- زمان، معادلهٔ سرعت- زمان را به دست می‌آوریم و سپس معادلهٔ سرعت- زمان را مساوی صفر قرار می‌دهیم تا لحظه‌ای را که متحرک تغییر جهت می‌دهد، بیابیم.

$$x = -2t^2 + 12t - 40 \Rightarrow \begin{cases}a = -4\,m/s^2 \\ v_0 = 12\,m/s\end{cases}$$
$$\Rightarrow v = -4t + 12 = 0 \Rightarrow t = 3\,s$$

کافی است میزان جابه‌جایی متحرک را در دو بازهٔ ۰ تا ۳s و ۳s تا ۵s حساب کرده و درنهایت باهم جمع کنیم تا مسافت طی‌شده در بازهٔ زمانی صفر تا $t = 5s$ به دست آید:

$$x = -2t^2 + 12t - 40$$

$$\begin{cases}x_0 = -40\,m \\ x_3 = -2\times 9 + 12\times 3 - 40 = -22\,m\end{cases} \Rightarrow |\Delta x| = |-22-(-40)| = 18\,m$$

$$\begin{cases}x_3 = -22m \\ x_5 = -2\times 25 + 12\times 5 - 40 = -30\,m\end{cases} \Rightarrow |\Delta x'| = |-30-(-22)| = 8\,m$$

$$d = |\Delta x| + |\Delta x'| = 18 + 8 = 26\,m$$

۸۰ گزینه ۱

گام اول

الف) متحرکی با سرعت اولیه $v_0 = 4m/s \leftarrow +4m/s$

ب) با شتاب $a = 2m/s^2 \leftarrow 2m/s^2$

ج) در یک مسیر مستقیم $12m$ جابه‌جا می‌شود $\leftarrow \Delta x = 12m$

د) سرعت متوسط متحرک در این جابه‌جایی چقدر است؟ $\leftarrow v_{av} = ?$

گام دوم

اگر سرعت ابتدا و انتهای بازه زمانی را داشته باشیم، درصورتی‌که شتاب حرکت ثابت باشد، سرعت متوسط از رابطهٔ $v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$ به دست می‌آید. سرعت اولیه را داریم پس کافی است سرعت نهایی را به دست آوریم:

با توجه به رابطهٔ مستقل از زمان داریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow v^2 - (4)^2 = 2 \times 2 \times 12 \Rightarrow v^2 = 64 \Rightarrow v = \pm 8m/s$$

از آنجایی‌که v_0 مثبت و a هم مثبت و ثابت است، هیچ وقت سرعت منفی نخواهد شد.

بنابراین سرعت متوسط برابر است با:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{4 + 8}{2} = 6m/s$$

۸۱ گزینه ۲

گام اول

الف) جسمی به جرم یک کیلوگرم در شرایط خلأ رها می‌شود $\leftarrow m = 1kg$

ب) و بعد از ۴ ثانیه به زمین می‌رسد $\leftarrow t = 4s$

ج) کار نیروی وزن در ثانیهٔ سوم سقوط چند ژول است؟ $\leftarrow W_{mg} = ?$, $(t_1 = 2s \Rightarrow t_2 = 3s)$: ثانیهٔ سوم حرکت $(n = 3 , T = 1s)$

گام دوم

برای متحرکی که رها شده است، جابه‌جایی در T ثانیهٔ nام را می‌توان از رابطهٔ زیر محاسبه کرد:

$$\Delta x = \frac{1}{2}aT^2(2n - 1) = \frac{1}{2} \times 10 \times 1^2 \times (2 \times 3 - 1) = 5 \times 5 = 25m$$

درنهایت کار نیروی وزن در ثانیهٔ سوم برابراست با:

$$W_{mg} = F\,d\cos\theta = mg\Delta x = 1 \times 10 \times 25 = 250J$$

۸۲ گزینه ۳

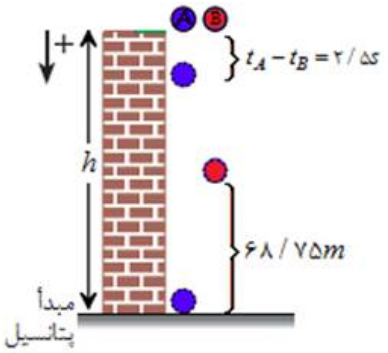
گام اول

الف) دو جسم به فاصلهٔ زمانی $۲/۵\,s$ رها می‌شوند ← $t_A - t_B = ۲/۵\,s$

ب) چند ثانیه پس از رها شدن گلولهٔ اول، فاصلهٔ دو گلوله به $۶۸/۷۵\,m$ می‌رسد؟ ← $t_A = ?\ ,\ \Delta y_A - \Delta y_B = ۶۸/۷۵\,m$

گام دوم

معادلهٔ مکان گلوله‌های A و B را نوشته، از هم کم می‌کنیم و مساوی $۶۸/۷۵\,m$ قرار می‌دهیم (جهت مثبت رو به پایین فرض شود).



$$\begin{cases}\Delta y_A = \frac{۱}{۲}gt_A^۲\\ \Delta y_B = \frac{۱}{۲}gt_B^۲\end{cases} \Rightarrow \Delta y_A - \Delta y_B = ۶۸/۷۵ \Rightarrow ۵t_A^۲ - ۵t_B^۲ = ۶۸/۷۵ \Rightarrow t_A^۲ - t_B^۲ = ۱۳/۷۵$$

ازطرفی $t_B = t_A - ۲/۵$ است، درنتیجه t_A برابر است با:

$$t_A^۲ - (t_A - ۲/۵)^۲ = ۱۳/۷۵ \Rightarrow ۵t_A - ۶/۲۵ = ۱۳/۷۵ \Rightarrow t_A = ۴\,s$$

۸۳ گزینه ۳

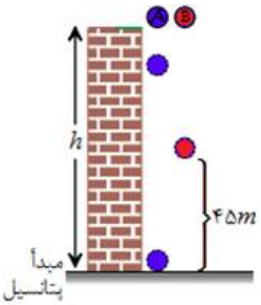
گام اول

الف) دو گلوله به فاصلهٔ زمانی یک ثانیه از نقطه‌ای به ارتفاع h رها می‌شوند ← $t_B = t_A - ۱$

ب) اگر بیشترین فاصلهٔ بین آن‌ها در طول حرکت به ۴۵ متر برسد، ارتفاع h چند متر است؟ ← $\Delta y_A - \Delta y_B = ۴۵\ ,\ \ \Delta y_A = h = ?$

گام دوم

با توجه به اینکه بیشترین فاصله، وقتی اتفاق می‌افتد که یکی از دو گلوله به زمین رسیده باشد، معادلهٔ مکان دو گلوله را می‌نویسیم و سپس از هم کم کرده و مساوی ۴۵ متر قرار می‌دهیم تا t_A را به دست آوریم؛ و درنهایت h را محاسبه کنیم (جهت مثبت رو به پایین فرض شود).



$$\begin{cases} \Delta y_A = -\frac{۱}{۲} g t_A^۲ \\ \Delta y_B = -\frac{۱}{۲} g t_B^۲ \end{cases} \Rightarrow \Delta y_A - \Delta y_B = ۴۵ \Rightarrow ۵t_A^۲ - ۵t_B^۲ = ۴۵$$

از طرفی : $t_B = t_A - ۱ \ \Rightarrow\ {t_A}^۲ - (t_A - ۱)^۲ = ۹ \ \Rightarrow\ ۲t_A - ۱ = ۹ \ \Rightarrow\ t_A = ۵\,s$

t_A را در معادلهٔ مکان گلولهٔ A جایگذاری کرده تا h به دست آید:

$$\Delta y_A = h = \frac{۱}{۲} g {t_A}^۲ = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۵^۲ = ۱۲۵m$$

۸۴

گزینه ۴

گام اول

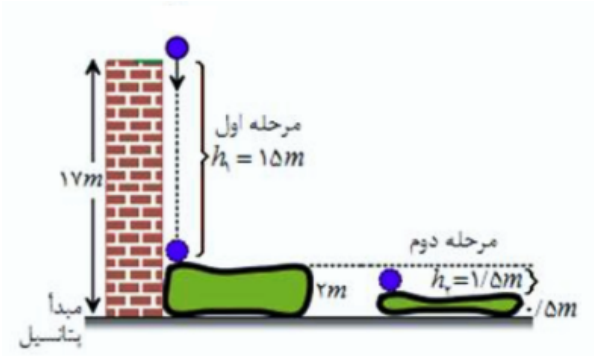
الف) شخصی از ارتفاع ۱۷ متری زمین روی بالشی به ضخامت ۲ متر سقوط می‌کند ← $h = ۱۷\,m\ ,\ h' = ۲m$

ب) اگر در این برخورد کمترین ضخامت بالش به ۰/۵ متر برسد ← $h'_{min} = ۰/۵\,m$

ج) اندازهٔ شتاب شخص بعد از رسیدن به بالش تا انتهای مسیر چند g است؟ ← $\frac{|a|}{g} = ?$

گام دوم

مطابق شکل، جسم $۱/۵\,m$ را با شتاب a به سمت پایین حرکت کرده؛ بنابراین باتوجه‌به معادلهٔ مستقل از زمان برای دو مرحلهٔ اول و دوم، مقدار شتاب a برحسب g را می‌توان به دست آورد:



$$v_۱^۲ = ۲gh_۱ \Rightarrow v_۱^۲ = ۲ \times g \times ۱۵ \Rightarrow v_۱ = \sqrt{۳۰g}\ m/s$$

$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = ۲ah_۲ \Rightarrow ۰ - ۳۰g = ۲ \times a \times ۱/۵ \Rightarrow a = -۱۰g \Rightarrow \frac{|a|}{g} = ۱۰$$

۸۵ گزینه ۲

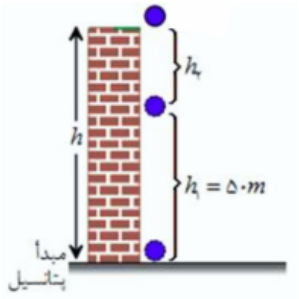
گام اول

الف) در ۵۰ متری سطح زمین، سرعتش $15m/s$ می‌شود ← $h_1 = 50m\ ,\ v_1 = 15m/s$

ب) چند ثانیه پس از رها شدن به زمین می‌رسد؟ ← $t = ?$

گام دوم

اگر ارتفاع h_2 را به دست آوریم می‌توانیم ارتفاع کل را محاسبه کنیم و درنهایت مدت‌زمانی که گلوله ارتفاع کل را طی کرده است، می‌یابیم:



$$v_1^2 = 2gh_2 \Rightarrow 225 = 2 \times 10 \times h_2 \Rightarrow h_2 = \frac{45}{4}\ m$$

از معادلهٔ مکان متحرک استفاده کرده و زمان رسیدن متحرک به زمین را حساب می‌کنیم (توجه: جهت مثبت، رو به بالا و مبدأ پتانسیل، زمین فرض شود).

$$h = h_1 + h_2 \Rightarrow h = 50 + \frac{45}{4} = \frac{245}{4}m \Rightarrow y_0 = \frac{245}{4}m$$

$$y = -\frac{1}{2}gt^2 + y_0 \Rightarrow 0 = -5t^2 + \frac{245}{4} \Rightarrow t = 3/5s$$

۸۶

گزینه ۳

گام اول

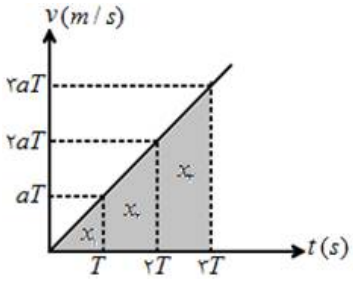
الف) مسیر را در سه بازه زمانی مساوی و متوالی طی می‌کند ← مجموع این مسافت‌ها باید با ارتفاع رهاشده مساوی باشد.

ب) مسافت‌های طی‌شده به ترتیب چند متر است؟ ← $x_۱, x_۲, x_۳ = ?$

گام دوم

روش اول)

برای این‌گونه سؤال‌ها یک قاعدهٔ کلی وجود دارد که جابه‌جایی در بازه‌های زمانی مساوی و متوالی T، تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت $aT^۲$ می‌دهد. در این حالت همه جابه‌جایی‌ها مضرب فردی از جابه‌جایی در T ثانیه اول‌اند (مطابق نمودار سرعت- زمان شکل زیر).



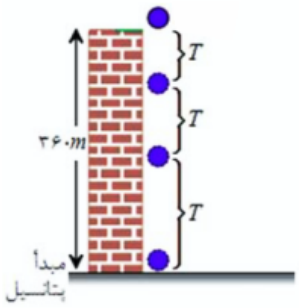
پس جابه‌جایی‌ها با ضرایب ۱ و ۳ و ۵ و ... طی می‌شوند ($x_۱ = \frac{۱}{۲}aT^۲$ و $x_۲ = \frac{۳}{۲}aT^۲$ و $x_۳ = \frac{۵}{۲}aT^۲$). تنها گزینه‌ای که این ضرایب در آن رعایت شده گزینهٔ ۳ است:

$۵ \times ۴۰ , ۳ \times ۴۰ , ۴۰$

روش دوم)

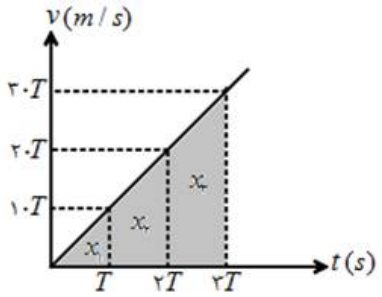
باتوجه‌به اینکه شتاب ثابت است، نمودار سرعت به‌صورت خطی است.

$v = gt$



$t(s)$	T	$۲T$	$۳T$
$v(m/s)$	$۱۰T$	$۲۰T$	$۳۰T$

باتوجه‌به نقاط به‌دست‌آمده نمودار $v - t$ را رسم می‌کنیم:



ازآنجاکه مساحت زیر نمودار $v-t$ برابر با جابه‌جایی است و قدر مطلق آن، همان مسافت طی‌شده است، برای بازه‌های زمانی مختلف، مسافت‌های طی‌شده را محاسبه می‌کنیم؛ ولی ابتدا باید T را به دست آوریم:

$$\Delta y = \frac{۱}{۲} \times gt^{۲} \xrightarrow{t=۳T} ۳۶۰ = \frac{۱}{۲} \times ۱۰ \times ۹T^{۲} \Rightarrow T^{۲} = ۸$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x_{۱} = \frac{۱۰}{۲} \times T^{۲} = ۵T^{۲} = ۵ \times ۸ = ۴۰m \\ x_{۲} = \frac{۱۰T + ۲۰T}{۲} \times T = ۱۵T^{۲} = ۱۵ \times ۸ = ۱۲۰m \\ x_{۳} = \frac{۲۰T + ۳۰T}{۲} \times T = ۲۵T^{۲} = ۲۵ \times ۸ = ۲۰۰m \end{cases}$$

پس مسافت‌ها به‌صورت ۴۰ و ۱۲۰ و ۲۰۰ طی می‌شوند.

۸۷ گزینه ۲

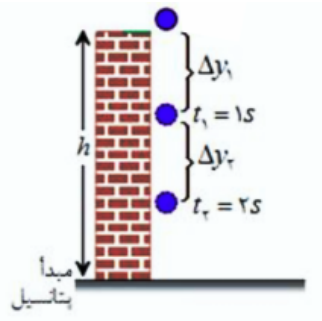
گام اول

الف) در ثانیهٔ اول، $\Delta y_۱$ را طی کرده ← در بازه ۰ تا ۱ ثانیه : $\Delta y_۱$

ب) در ثانیهٔ دوم، $\Delta y_۲$ را طی کرده ← در بازه ۱ تا ۲ ثانیه : $\Delta y_۲$

گام دوم

راه حل اول: با استفاده از معادلهٔ سرعت- زمان، سرعت را در لحظات $t_۱ = ۱s$ و $t_۲ = ۲\,s$ به دست می‌آوریم (جهت مثبت رو به بالا و مبدأ پتانسیل زمین فرض شود).



$$v_۱ = -gt_۱ \xrightarrow{t_۱=۱s} v_۱ = -۱۰ \Rightarrow v_۱ = -۱۰m/s$$
$$v_۲ = -gt_۲ \xrightarrow{t_۲=۲s} v_۲ = -۲۰ \Rightarrow v_۲ = -۲۰m/s$$

به کمک معادلهٔ مستقل از زمان، اندازهٔ $\Delta y_۱$ و $\Delta y_۲$ را محاسبه کرده و نسبت آن‌ها را می‌یابیم:

$$v_۱^۲ = -۲g\Delta y_۱ \Rightarrow ۱۰۰ = -۲ \times ۱۰\Delta y_۱ \Rightarrow ۱۰۰ = -۲۰\,\Delta y_۱ \Rightarrow |\Delta y_۱| = ۵\ m$$
$$v_۲^۲ - v_۱^۲ = -۲g\Delta y_۲ \Rightarrow ۴۰۰ - ۱۰۰ = -۲ \times ۱۰\Delta y_۲ \Rightarrow ۳۰۰ = -۲۰\Delta y_۲ \Rightarrow |\Delta y_۲| = ۱۵\ m$$
$$\frac{|\Delta y_۲|}{|\Delta y_۱|} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

راه حل دوم:

در حرکت سقوط آزاد، جابه‌جایی در بازه‌های زمانی متوالی تشکیل تصاعد عددی می‌دهد. در اینجا باتوجه‌به معادلهٔ مکان و اینکه بازهٔ زمانی یک ثانیه است، جابه‌جایی‌ها به ترتیب $۵m$، $۵ + ۱۰ = ۱۵m$، $۱۵ + ۱۰ = ۲۵m$ و ... می‌باشد؛ بنابراین نسبت جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم به جابه‌جایی در ثانیهٔ اول برابر است با:

$$\frac{|\Delta y_۲|}{|\Delta y_۱|} = \frac{۱۵}{۵} = ۳$$

۸۸ گزینه ۱

گام اول

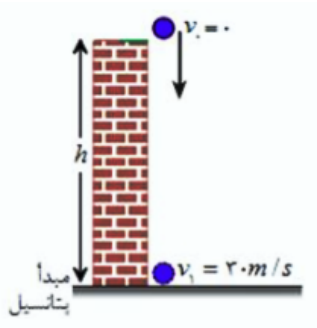
الف) رهاشده ← $v_0 = 0$

ب) با سرعت $30 m/s$ به زمین برخورد می‌کند ← $v_1 = 30\ m/s$

ج) ارتفاع بلندی ؟ ← $h = ?$

گام دوم

برای درک بهتر مسئله، شکل را رسم می‌کنیم و با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان، ارتفاع بلندی را به دست می‌آوریم:



$$v_1^2 - v_0^2 = 2gh \rightarrow (30)^2 = 2 \times 10 \times h \rightarrow h = 45\ m$$

۸۹ گزینه ۲

گام اول

الف) دو متحرک A و B از یک نقطه بدون سرعت اولیه ← $x_{0A} = x_{0B}\ ,\ v_{0A} = v_{0B} = 0$

ب) شتاب متحرک A، ۴ برابر متحرک B ← $a_A = 4a_B$

ج) در جابجایی مساوی، سرعت متوسط متحرک A چندبرابر سرعت متوسط متحرک B است؟ ← $\frac{v_{A\,av}}{v_{B\,av}} = ?\ ,\ \Delta x_A = \Delta x_B$

گام دوم

با استفاده از معادلهٔ مستقل از زمان برای دو متحرک A و B، نسبت سرعت ثانویهٔ آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\begin{cases} v_{1A}^2 - v_{0A}^2 = 2a_A \Delta x_A \\ v_{1B}^2 - v_{0B}^2 = 2a_B \Delta x_B \end{cases} \Rightarrow \frac{v_{1A}^2}{v_{1B}^2} = \frac{a_A}{a_B} = 4 \Rightarrow \frac{v_{1A}}{v_{1B}} = 2$$

ازآنجایی‌که $v_{av} = \frac{v_0 + v_1}{2}$ نسبت $\frac{v_{A\,av}}{v_{B\,av}}$ برابر است با:

$$\frac{v_{A\,av}}{v_{B\,av}} = \frac{\frac{v_{0A}+v_{1A}}{2}}{\frac{v_{0B}+v_{1B}}{2}} = \frac{v_{1A}}{v_{1B}} = 2$$

۹۰ گزینه ۲

چون حرکت دو متحرک، حرکت با شتاب ثابت است، بنابراین از معادلهٔ سرعت- زمان حرکت شتاب ثابت یعنی $v = at + v_0$ استفاده می‌کنیم و برای هر دو متحرک این معادله را می‌نویسیم و همچنین چون دو متحرک از حال سکون حرکت کرده‌اند $v_0 = 0$؛ یعنی داریم:

$$\begin{cases} \text{متحرک اول}: v = at + v_0 \xrightarrow{v=10} 10 = at & (1) \\ \text{متحرک دوم}: v = at + v_0 \xrightarrow{v=22} 22 = (a + 1/5)t & (2) \end{cases}$$

با قرار دادن مقدار a از رابطهٔ (۱) در رابطهٔ (۲) داریم:

$$\xrightarrow{(1),(2)} 22 = 10 + 1/5t \Rightarrow 12 = 1/5t \Rightarrow t = 8s$$

۹۱

گزینه ۳

گام اول

الف) اتومبیل با سرعت $۲۰m/s$ درحرکت است $\leftarrow v_A = ۲۰m/s$

ب) ۳۶ متر جلوتر اتومبیل دیگری با شتاب ثابت $۲m/s^۲ \leftarrow a_B = ۲m/s^۲ \ , \ x_B = +۳۶$

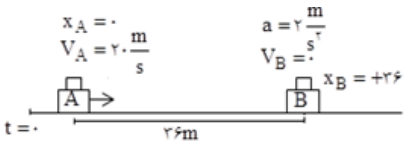
پ) از حال سکون و در همان جهت به راه می افتد $\leftarrow (v_۰)_B = ۰ \ , \ v_B > ۰$

ج) اتومبیل ها دو بار از هم سبقت می گیرند $\leftarrow x_A = x_B$

د) فاصله زمانی این دو سبقت چند ثانیه است؟ $\Delta t = ?$

گام دوم

مکان شروع به حرکت اتومبیل A که عقب تر از اتومبیل B است را مبدأ مکان در نظر می گیریم سپس با نوشتن معادلهٔ حرکت برای هر دو اتومبیل و مساوی قرار دادن دو معادله باهم می توانیم زمان های سبقت را به دست آوریم:



ابتدا معادلهٔ حرکت (با سرعت ثابت) اتومبیل A را می نویسیم:

$$\begin{cases} x_A = v_A t_A + (x_۰)_A \\ (x_۰)_A = ۰ \end{cases} \Rightarrow x_A = ۲۰t$$

حالا معادلهٔ حرکت (با شتاب ثابت) اتومبیل B را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x_B = \frac{۱}{۲} a_B t^۲ + (v_۰)_B t + (x_۰)_B \\ (x_۰)_B = +۳۶m \end{cases} \Rightarrow x_B = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times t^۲ + ۰ + ۳۶ = t^۲ + ۳۶$$

با مساوی قرار دادن دو معادلهٔ حرکت اتومبیل‌های A و B، زمان‌های سبقت دو اتومبیل از یکدیگر را به دست می‌آوریم.

$$x_B = x_A \Rightarrow ۲۰t = t^۲ + ۳۶ \Rightarrow t^۲ - ۲۰t + ۳۶ = ۰ \Rightarrow (t - ۲)(t - ۱۸) = ۰ \Rightarrow t_۱ = ۲ \ , \ t_۲ = ۱۸$$

پس اختلاف‌زمانی دو سبقت برابر $\Delta t = t_۲ - t_۱ = ۱۸ - ۲ = ۱۶s$ است. $\Rightarrow$

۹۲ گزینه ۱

گام اول

الف) دو متحرک از حال سکون ← $v_{01} = v_{02} = 0$

ب) با شتاب‌های $2m/s^2$, $8m/s^2$ ← $a_1 = 2m/s^2\ ,\ \ a_2 = 8m/s^2$

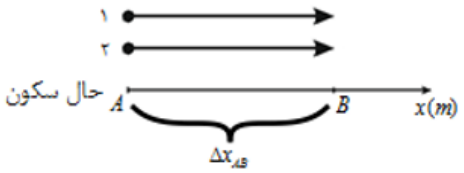
ج) از نقطهٔ A در مسیر مستقیم به مقصد نقطهٔ B هم‌زمان حرکت می‌کنند ← $\Delta x_1 = \Delta x_2$

د) اختلاف‌زمانی رسیدن آن‌ها به مقصد ۳ ثانیه است ← $t_2 = t_1 - 3$

ه) فاصلهٔ AB؟ ← $\Delta x_{AB} = ?$

گام دوم

با مساوی قرار دادن مقدار جابجایی دو متحرک و اینکه اختلاف‌زمانی آن‌ها ۳ ثانیه است، لحظهٔ t_1 را محاسبه کرده و در معادلهٔ مکان جاگذاری می‌کنیم تا فاصلهٔ AB به دست آید:



$$\Delta x_1 = \Delta x_2 \ \rightarrow\ \frac{1}{2}a_1t_1^2 + v_{01}t_1 = \frac{1}{2}a_2t_2^2 + v_{02}t_2 \ \rightarrow\ t_1^2 = 4(t_1 - 3)^2 \ \rightarrow\ t_1 = 6\ s$$

جاگذاری در معادلهٔ مکان : $\Delta x_1 = \Delta x_2 = \Delta x_{AB} \rightarrow \frac{1}{2}a_1t_1^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times 36 = 36\ m$

۹۳ گزینه ۱

گام اول

الف) در مبدأ زمان با سرعت $+3m/s$ از مکان $+4m$ می‌گذرد ← $x_0 = +4\ m\ ,\ \ v_0 = +3\ m/s$

ب) متحرک در لحظهٔ $t = 4s$ در جهت مثبت محور x و در بیشترین فاصلهٔ خود از مبدأ است. ← $t_1 = 4s\ ,\ v_1 = 0$

ج) در لحظهٔ $t = 8\ s$ در چند متری مبدأ ؟ ← $t = 8s\ ,\ \ x = ?$

گام دوم

روش اول)

برای درک بهتر، مسیر حرکت متحرک را روی محور x رسم می‌کنیم.

با توجه به اینکه سرعت اولیه مثبت، شتاب ثابت و سرعت در بیشترین فاصله از مبدأ، صفر است و اینکه $a < 0$ است، می‌یابیم که متحرک بعد از ۴ ثانیه شروع به حرکت، در خلاف جهت محور x می‌کند و در همان مدت ۴ ثانیه دوباره به نقطهٔ اول باز می‌گردد و بعد از مدت ۸ ثانیه به مکان اولیهٔ خود یعنی ۴ متری مبدأ می‌رسد.

روش دوم)

معادلهٔ سرعت - زمان را می‌نویسیم و شتاب را به دست می‌آوریم.

$$v_1 = at_1 + v_0 \ \rightarrow\ 0 = 4 \times a + 3 \ \rightarrow\ a = \frac{-3}{4}\ m/s^2$$

سپس با استفاده از معادلهٔ مکان - زمان، مکان را در لحظهٔ $t = 8s$ پیدا می‌کنیم:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0t + x_0 \ \rightarrow\ x = \frac{1}{2} \times \frac{-3}{4} \times 8^2 + 3 \times 8 + 4 \ = \ +4\ m$$

۹۴

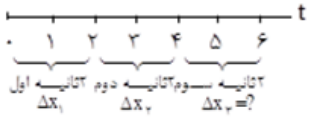
گزینه ۲

گام اول

الف) معادلهٔ سرعت- زمان متحرکی روی محور x به‌صورت $v = -۲t + ۴$ ← شتاب ثابت، $a = -۲m/s^۲$ و $v_۰ = +۴m/s$

ب) بزرگی جابه جایی متحرک در ۲ ثانیه سوم چند متر است؟ ← یعنی جابه جایی در بازهٔ زمانی ۴ تا ۶ ثانیه رو باید حساب کنیم.

گام دوم



روش اول:

مکان متحرک از رابطهٔ $x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t + x_۰$ به دست می آید. می توانیم مکان متحرک در لحظه $t = ۶s$ و $t = ۴s$ را مشخص کنیم و بعد جابه جایی را از رابطهٔ $\Delta x = x_۶ - x_۴$ به دست بیاوریم:

اکنون در لحظه های $t = ۴s$ و $t = ۶s$ مکان متحرک را محاسبه می کنیم:

$$\begin{cases} t = ۴s \Rightarrow x_۴ = \frac{۱}{۲}(-۲)(۴)^۲ + ۴ \times (۴) + x_۰ = x_۰ \\ t = ۶s \Rightarrow x_۶ = -\frac{۱}{۲}(-۲)(۶)^۲ + ۴ \times (۶) + x_۰ = -۱۲ + x_۰ \end{cases}$$

پس بزرگی جابه جایی برابر است با:

$$\Delta x = x_۶ - x_۴ = -۱۲ + x_۰ - x_۰ = -۱۲m \Rightarrow |\Delta x| = ۱۲m$$

روش دوم:

با توجه به $v = -۲t + ۴$، سرعت در لحظه های $t_۱ = ۴s$ و $t_۲ = ۶s$ را محاسبه می‌کنیم:

$$\begin{cases} t_۱ = ۴\ s : v_۱ = -۲ \times ۴ + ۴ = -۴\ m/s \\ t_۲ = ۶\ s : v_۲ = -۲ \times ۶ + ۴ = -۸\ m/s \end{cases}$$

از طرفی شتاب ثابت است؛ پس $|\Delta x|$ را می توانیم از رابطهٔ $|\Delta x| = \frac{|v_۱+v_۲|}{۲}\Delta t$ به دست بیاوریم:

$$|\Delta x| = \frac{|v_۱ + v_۲|}{۲}\Delta t = \frac{|(-۴) + (-۸)|}{۲} \times ۲ = ۱۲\ m$$